SÔBRE A APLICAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO DE BELTRAMI À SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO PARA OS MEIOS CONTÍNUOS

SERGIO COLLE

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

Affonso Silva Telles

Luiz Bevilacqua

[illegible]

RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

AGOSTO DE 1972

A meus pais

A Gracinha

A meus irmãos

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Affonso da Silva Telles.

Aos amigos da COPPE.

A Gracie, pelo trabalho de datilografia.

S U M Á R I O

O presente trabalho é concernente a integração da equação do movimento para os meios contínuos.

Nele são apresentadas algumas generalizações com base no trabalho de Gurtin sôbre as funções de Tensão, as quais, permitem estabelecer um teorema de representação da solução da equação dinâmica no espaço-tempo.

A solução estabelecida é uma complementação das soluções apresentadas por Beltrami, Maxwell, Morera e Truesdell, tendo como base os teoremas de representação estabelecidos por Gurtin.

A B S T R A C T

The subject of this work is the integration of the dynamical equations of continuous media in the space-time formalism.

We have stablished a generalization for a n-dimensional space, of a theorem on stress functions of Gurtin's, which enables us to write a representation theorem for the solution of the equations of motion in space-time.

The solution obtained generalize those given by Beltrami, Maxwell, Morera and Truesdell.

I N D I C E

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como principal objetivo obter uma integração da equação do movimento para os meios contínuos, partindo dos teoremas de representação da solução da equação div $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$ onde $\underset{\sim}{T}$ é campo tensorial de 2a. ordem, simétrico e continuamente derivável em certa região do espaço euclidiano n-dimensional, e representa o campo de tensões definido sobre um corpo.

As pesquisas relativas a esta equação remontam do século XIX com Airy (1863), Maxwell (1870), Morera (1892) e Beltrami (1892), até aos nossos dias com os trabalhos de Morinaga & Nôno (1950), Truesdell (1959), Gurtin (1963), Stippes (1967) e muitos outros. (Uma síntese destas pode ser encontrada em [3]).

Os resultados aqui apresentados baseiam-se essencialmente no estudo dos trabalhos de Truesdell[1] e Gurtin[2].

Em seu artigo, Truesdell [1] apresentou uma solução para a equação acima e para a equação do movimento, como resultado da aplicação direta do Teorema do Potencial Vetorial ao problema em questão. Restrita ao espaço euclidiano (espaço plano) tetradimensional, essa representação da solução deixa de ser completa no sentido de Gurtin. A falta de generalidade é justificada pelo fato de que o procedimento usado não considera a natureza da região na qual as tensões são definidas, o que, como veremos, tem implicações diretas sobre a forma de representação da solução.

Seguindo o método de Truesdell, pôde-se determinar para o espaço euclidiano n-dimensional uma solução idêntica àquela do espaço tetradimensional. As soluções assim determinadas são semelhantes, tanto na estrutura como na simetria dos potenciais, à solução tridimensional de Beltrami e, porisso serão aqui denominadas por Representação de Beltrami. Seguindo quase que fielmente o trabalho de Gurtin [2], pôde-se sem muito esforço generalizar seus resultados; as complementações das soluções para o espaço euclidiano n-dimensional.

Nos trabalhos de pesquisa sobre a equação do movimento concernentes a métodos gerais de obtenção de soluções procura-se sempre formulá-las em termos de funções potenciais vetoriais ou tensoriais denominadas de Funções de Tensão. Diz-se que uma solução é formulada por Funções de Tensão, quando esta satisfaz a equação do movimento para os meios contínuos, em termos de funções potenciais vetoriais e tensoriais, juntamente com derivadas parciais destas funções, possivelmente suplementada por alguma característica do espaço particular, dentro do qual estamos considerando imerso o corpo. Existem basicamente dois tipos de soluções por funções de tensão:

- O primeiro tipo é restrito a um material particular; é solução obtida da equação do movimento para materiais particulares. Como exemplo, pode-se citar as soluções dos problemas da Elasticidade Linear e da Mecânica Clássica dos Fluidos.

- O segundo tipo não se restringe a um material particular; a solução é válida para todos os meios contínuos. As soluções do segundo tipo são oriundas dos teoremas de representação, cujas hipóteses levam em consideração a continuidade dos campos em jogo, a natureza das regiões e do espaço particular, não tendo qualquer ligação com o funcional constitutivo do material.

Logicamente, se um teorema de representação fôr bem estabelecido, a solução obtida conterá obrigatoriamente todas as soluções do primeiro tipo, ou seja, as soluções especiais. Por exemplo, a conhecida solução de Gurtin:

$$\underset{\sim}{T} = \text{rot rot } \underset{\sim}{\phi} + \nabla^2(\nabla\underset{\sim}{g} + \nabla\underset{\sim}{g}^T) - \nabla\nabla(\nabla.\underset{\sim}{g});\ \nabla^4\underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{0};\ \underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{\phi}^T;$$

para o caso particular de $\underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{0}$ e $\underset{\sim}{T} = \mu(\nabla\underset{\sim}{u} + \nabla\underset{\sim}{u}^T)$, transforma-se em:

$$\nabla\left[\mu\underset{\sim}{u} - \nabla^2\underset{\sim}{g} + \frac{1}{2}\nabla(\nabla.\underset{\sim}{g})\right] + \nabla\left[\mu\underset{\sim}{u} - \nabla^2\underset{\sim}{g} + \frac{1}{2}\nabla(\nabla.\underset{\sim}{g})\right]^T = \underset{\sim}{0},$$

a qual é evidentemente satisfeita pela solução de Galerkin:

$$\mu\underset{\sim}{u} = \nabla^2\underset{\sim}{g} - \frac{1}{2(1-\nu)}\nabla(\nabla.\underset{\sim}{g})\ ;\quad \nabla^4\underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{0}$$

no caso particular de $\nu = 0$.

Este trabalho refere-se a soluções do segundo tipo. Uma vez conhecida uma solução geral, teremos em mão uma verdadeira condição de compatibilidade, a qual demarca a fronteira do conjunto de todas as soluções especiais pos síveis. Toda solução da equação do movimento, para um material ou movimento particular deve satisfazer a solução geral; no sentido de que as soluções especiais devam de alguma forma, ser obtidas da solução geral por simplificação dos potenciais, conforme foi exemplificado.

CAPÍTULO II

REPRESENTAÇÃO DE BELTRAMI PARA O ESPAÇO EUCLIDIANO N-DIMENSIONAL

2.0 NOTAÇÕES

2.0.1 Convenção de Soma

Usaremos a convenção dos índices mudos.

Quando dois índices se repetirem num mesmo lado da expressão, indicarão operação de somatório. Se a letra representativa do índice fôr latina, o conjunto de valores do índice será $I_3 = \{1,2,3\}$; Se a letra fôr grega, o conjunto de valores será $I_n = \{1,2, \ldots n\}$, onde n é a dimensão do espaço.

2.0.2 Notação Componente e Intrínseca

Faremos uso da notação sugerida pela tabela seguinte:

	Intrínseca	Componente
Campo Escalar	ϕ	ϕ
Campo Vetorial	$\underset{\sim}{\psi}$	$\{\psi^{\Delta}\} = \{\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^n\}$ $\{\psi_{\Delta}\} = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$
Campo Tensorial	$\underset{\sim}{A}$	$A^{\Delta_1\Delta_2 \ldots \Delta n}$; $A_{\Delta_1\Delta_2 \ldots \Delta n}$ ou: $A^{\Delta_1\Delta_2 \ldots \Delta p}{}_{\Delta_{p+1} \ldots \Delta n}$

onde os índices elevados significam o caráter contravariante e, os índices rebaixados o caráter covariante.

2.0.3 Espaço Euclidiano

Denotar-se-á por $\mathbb{E}^n$, o espaço euclidiano (com curvatura de Riemann nula) n-dimensional;

$$\dim \mathbb{E}^n = n \quad ; \quad 1 \leqslant n < \infty.$$

2.0.4 Espaço vetorial e espaço dos tensores de 2a. ordem.

O espaço Euclidiano Translação de $\mathbb{E}^n$ será denotado por $\mathbb{V}$; seus elementos são vetores no sentido clássico. O espaço dos operadores lineares sobre $\mathbb{V}$ será simbolizado por $L(\mathbb{V},\mathbb{V})$; diremos também que $L(\mathbb{V},\mathbb{V})$ é o espaço dos tensores de 2a. ordem.

Se $\{\underset{\sim}{e}_\Gamma\}_{\Gamma\varepsilon I_n}$ é base de $\mathbb{V}$, $\{\underset{\sim}{e}_\Gamma \otimes \underset{\sim}{e}_\Delta\}_{\Gamma,\Delta\varepsilon I_n}$ será base de $L(\mathbb{V},\mathbb{V})$, onde $\otimes$ é o produto tensorial. Se $\{\underset{\sim}{e}^\Gamma\}_{\Gamma\varepsilon I_n}$ é base dual de $\{\underset{\sim}{e}_\Gamma\}_{\Gamma\varepsilon I_n}$ $\{\underset{\sim}{e}^\Gamma \otimes \underset{\sim}{e}_\Delta\}_{\Gamma,\Delta\varepsilon I_n}$ e $\{\underset{\sim}{e}^\Gamma \otimes \underset{\sim}{e}^\Delta\}_{\Gamma,\Delta\varepsilon I_n}$ serão bases de $L(\mathbb{V},\mathbb{V})$.

Assim qualquer tensor de $L(\mathbb{V},\mathbb{V})$ pode ser representado por:

$$\underset{\sim}{T} = T_\Omega^\Delta\, \underset{\sim}{e}_\Delta \otimes \underset{\sim}{e}^\Omega = T_{\Omega\Delta}\, \underset{\sim}{e}^\Omega \otimes \underset{\sim}{e}^\Delta = T^{\Omega\Delta}\, \underset{\sim}{e}_\Omega \otimes \underset{\sim}{e}_\Delta$$

2.0.5 Derivação covariante

A derivação covariante é representada por uma vír gula, seguida do índice correspondente a variável de derivação. Quando a derivada covariante se restringir a derivação parcial, então, no lugar do índice aparecerá a própria variável correspondente a derivação.

2.0.6 Gradiente de campo vetorial

Seja $\underset{\sim}{\psi}: \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{V}$; $\underset{\sim}{\psi} = \{\psi^\Delta\}$ ou $\{\psi_\Delta\}$; usaremos, segundo a conveniência, os seguintes símbolos para representar o gradiente do campo $\underset{\sim}{\psi}$: grad $\underset{\sim}{\psi}$

$$\nabla\underset{\sim}{\psi} = \left[\psi^\Delta{}_{,\Omega}\right] \quad \text{ou} \quad \left[\psi_{\Delta,\Omega}\right] \quad \text{, ou ainda:}$$

$$\nabla\underset{\sim}{\psi} = \psi^\Delta{}_{,\Omega} \; \underset{\sim}{e}^\Omega \otimes \underset{\sim}{e}_\Delta = \psi^{\Delta,\Omega} \, \underset{\sim}{e}_\Omega \otimes \underset{\sim}{e}_\Delta .$$

2.0.7 Divergência de um campo tensorial

Seja $\underset{\sim}{T} : \mathbb{E}^n \longrightarrow L(\mathbb{V},\mathbb{V})$.

Do mesmo modo, segundo a conveniência, usaremos os seguintes símbolos para a divergência de um campo tensorial $\underset{\sim}{T}$:

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{T} = \nabla.\underset{\sim}{T} = T^{\Omega\Delta}_{\ ,\Delta}\, \underset{\sim}{e}_{\Omega} = T^{\Delta}_{\Omega,\Delta}\, \underset{\sim}{e}^{\Omega}$$

2.0.8 Laplaciano de um campo vetorial

O Laplaciano de $\underset{\sim}{\psi} : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{V}$, será denotado por:

$$\nabla^2\underset{\sim}{\psi} = \psi^{\Omega,\Delta}_{\ ,\Delta}\, \underset{\sim}{e}_{\Omega} = \psi_{\Omega,\Delta}^{\ ,\Delta}\, \underset{\sim}{e}^{\Omega}$$

e,

$$\nabla^4\underset{\sim}{\psi} = \nabla^2\nabla^2\underset{\sim}{\psi} = \psi^{\Omega,\Delta\Xi}_{\ ,\Delta\Xi}\, \underset{\sim}{e}_{\Omega} = \psi_{\Omega,\Delta\Xi}^{\ ,\Delta\Xi}\, \underset{\sim}{e}^{\Omega} .$$

2.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

2.1.1 Campo tensorial equilibrado

Seja $\mathbf{R}$ uma região do espaço euclidiano $\mathbb{E}^n$; $\mathbf{R}$ significará em todo o trabalho, uma região limitada, podendo ser aberta ou fechada. Indicaremos por R uma região aberta e por $\bar{R}$ o seu fêcho. As regiões R serão consideradas regulares, conforme Kellog [14].

Seja um campo tensorial $\underset{\sim}{T}$; $R \subset \mathbb{E}^n$.

$\underset{\sim}{T}$: $R \rightarrow L(\mathbb{V},\mathbb{V})$.

$\underset{\sim}{T}$ *é um campo tensorial equilibrado*[1] *em* R *se* $\underset{\sim}{T} \in C^1(R)$ *e* $\operatorname{div} \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$, $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^T$ *onde* $\underset{\sim}{T}^T$ *é o transposto de* $\underset{\sim}{T}$.

Um campo tensorial é dito ser equilibrado em $\bar{R}$ se e somente o fôr equilibrado em R e fôr contínuo em $\bar{R}$.

2.1.2 Campo tensorial auto-equilibrado

Suponha que $\underset{\sim}{T}$ *é um campo tensorial equilibrado em* R. *Este campo será dito ser auto-equilibrado em* R, *se o vetor* $\underset{\sim}{L}(S) = \int_S \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{n}\, dA$ *se anular sobre toda superfície* S, *regular e fechada contida em* R.

Pode-se afirmar ainda que se $\bar{R}$ é uma região regular, cuja fronteira consiste de superfícies fechadas S_p ($p = 1, 2, \ldots N$), e se $\underset{\sim}{T}$ é um campo tensorial equilibrado em $\bar{R}$, então $\underset{\sim}{T}$ é auto-equilibrado se e somente se $\underset{\sim}{L}(S_p) = \underset{\sim}{0}$; $p = 1, 2, \ldots N$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Gurtin[2].

2.1.3 Regiões Perifráticas

Dizemos que uma região $R \subset \mathbb{E}^n$ é perifrática se e somente se essa região contem uma superfície S envolvendo pelo menos um ponto não pertencente a R. Uma região perifrática contem "buracos"; por exemplo, a casca esférica: $R = \{\underset{\sim}{x} |\ a < |\underset{\sim}{x}| < b\}$ é perifrática, enquanto que a bola aberta: $R = \{\underset{\sim}{x} |\ |\underset{\sim}{x}| < b\}$ não o é. Note-se também que uma região é perifrática apenas quando sua fronteira consiste de mais de uma superfície fechada.

2.2 REPRESENTAÇÃO DE BELTRAMI PARA O ESPAÇO EUCLIDIANO N-DIMENSIONAL ($3 \leq n < \infty$).

Inicialmente apresentaremos a solução da equação $\operatorname{div} \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$, $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^T$, $\underset{\sim}{T} \in C^1(R)$, pela aplicação direta do Teorema do Potencial Vetorial.

Sendo $\underset{\sim}{T}$ um campo tensorial equilibrado em R não perifrática, então, a aplicação do teorema do potencial vetorial nos mostra ser necessário e suficiente que $\underset{\sim}{T}$ seja dado por:

$$T^{\Omega\Delta} = b^{\Omega\Delta\Lambda}_{,\Lambda} \qquad (2.2.1)$$

com a condição:

$$b^{\Omega\Delta\Lambda} = - b^{\Omega\Lambda\Delta}. \qquad (2.2.2)$$

A condição de simetria sobre $\underset{\sim}{T}$ determina que $(b^{\Omega\Delta\Lambda} - b^{\Delta\Omega\Lambda})_{,\Lambda} = 0$; de onde, pela repetição da aplicação do mesmo teorema temos:

$$b^{\Omega\Delta\Lambda} - b^{\Delta\Omega\Lambda} = C^{\Omega\Delta\Lambda\Gamma}_{,\Gamma}. \qquad (2.2.3)$$

Por (2.2.2) vem:

$$C^{\Omega\Delta\Lambda\Gamma} = - C^{\Omega\Delta\Gamma\Lambda} = - C^{\Delta\Omega\Lambda\Gamma}.$$

Temos pela (2.2.3) que:

$$b^{\Delta\Lambda\Omega} - b^{\Lambda\Delta\Omega} = C^{\Delta\Lambda\Omega\Gamma}_{\ ,\Gamma} = - C^{\Delta\Lambda\Gamma\Omega}_{\ ,\Gamma} \tag{2.2.4}$$

e:

$$b^{\Lambda\Omega\Delta} - b^{\Omega\Lambda\Delta} = C^{\Lambda\Omega\Delta\Gamma}_{\ ,\Gamma} \tag{2.2.5}$$

de onde: somando (2.2.3) com (2.2.5) e subtraindo (2.2.4) vem:

$$(b^{\Omega\Delta\Lambda} - b^{\Delta\Omega\Lambda}) + (b^{\Lambda\Omega\Delta} - b^{\Omega\Lambda\Delta}) - (b^{\Delta\Lambda\Omega} - b^{\Lambda\Delta\Omega}) =$$

$$= C^{\Omega\Delta\Lambda\Gamma}_{\ ,\Gamma} + C^{\Lambda\Omega\Delta\Gamma}_{\ ,\Gamma} + C^{\Delta\Lambda\Gamma\Omega}_{\ ,\Gamma} = 2\ b^{\Omega\Delta\Lambda} \quad \text{, ou:}$$

$$b^{\Omega\Delta\Lambda} = \frac{1}{2} (C^{\Omega\Delta\Lambda\Gamma} + C^{\Lambda\Omega\Delta\Gamma} + C^{\Delta\Lambda\Gamma\Omega})_{,\Gamma\Lambda}$$

como: $C^{\Omega\Delta\Lambda\Gamma}_{\ ,\Lambda\Gamma} = 0$ pela anti-simetria em Λ e Γ, teremos:

$$b^{\Omega\Delta\Lambda} = \frac{1}{2} (C^{\Lambda\Omega\Delta\Gamma} + C^{\Delta\Lambda\Gamma\Omega})_{,\Gamma\Lambda} = \frac{1}{2} (C^{\Lambda\Omega\Delta\Gamma} + C^{\Delta\Gamma\Lambda\Omega})_{,\Gamma\Lambda} \quad ;$$

pondo

$$\frac{1}{2} (C^{\Lambda\Omega\Delta\Gamma} + C^{\Delta\Gamma\Lambda\Omega}) = h^{\Lambda\Omega\Delta\Gamma} \quad ,$$

teremos imediatamente as seguintes propriedades para $\underset{\sim}{h}$:

$$h^{\Lambda\Omega\Delta\Gamma} = - h^{\Omega\Lambda\Delta\Gamma} = - h^{\Lambda\Omega\Gamma\Delta} \qquad (2.2.6)$$

e $$h^{\Lambda\Omega\Delta\Gamma} = h^{\Delta\Gamma\Lambda\Omega} .$$

Substituindo $b^{\Omega\Delta\Lambda}$ na equação (2.2.1) temos:

$$T^{\Omega\Delta} = h^{\Lambda\Omega\Delta\Gamma}{}_{,\Lambda\Gamma} \qquad (2.2.7)$$

A solução $\underset{\sim}{h}$ é única a menos de solução ${}_o\underset{\sim}{h}$ tal que:

$${}_o\underset{\sim}{h}^{\Lambda\Omega\Delta\Gamma}{}_{,\Lambda\Gamma} = 0 \qquad (2.2.8)$$

Seguindo o procedimento de Truesdell[1] podemos definir um campo tensorial $\underset{\sim}{A}$, de ordem 2(n-2), do seguinte modo:

$$A_{\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{n-2}\,\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_{n-2}} = \frac{1}{\left[2(n-2)!\right]^2}\, e_{\bar{\Omega}\bar{\Gamma}\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{n-2}} \times$$

$$\times \quad e_{\bar{\Delta}\bar{\Xi}\Delta_1\ldots\Delta_{n-2}} \,.\, h^{\overline{\Gamma\Omega\Delta\Xi}} ,$$

ou na representação mais compacta:

$$A_{\{\Gamma\}\{\Delta\}} = \frac{1}{\left[2(n-2)!\right]^2} \; e_{\bar{\Omega}\bar{\Gamma}\{\Gamma\}} \; e_{\bar{\Delta}\bar{\Xi}\{\Delta\}} \; h^{\bar{\Gamma}\bar{\Omega}\bar{\Delta}\bar{\Xi}} \qquad (2.2.9)$$

com $\{\Gamma\} = \{\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{n-2}\}$ e $\{\Delta\} = \{\Delta_1\ldots\Delta_{n-2}\}$, onde $\underset{\sim}{e}$ é o tensor alternador de ordem n.

Contraindo a expressão acima com os componentes de $\underset{\sim}{e}$; $e^{\Omega\Gamma\{\Gamma\}}$ e $e^{\Delta\Xi\{\Delta\}}$ vem:

$$e^{\Omega\Gamma\{\Gamma\}} \, e^{\Delta\Xi\{\Delta\}} \, A_{\{\Gamma\}\{\Delta\}} = \frac{1}{\left[2(n-2)!\right]^2} \, e^{\Omega\Gamma\{\Gamma\}} \, e_{\bar{\Omega}\bar{\Gamma}\{\Gamma\}} \times$$

$$\times \quad e^{\Delta\Xi\{\Delta\}} \, . \, e_{\bar{\Delta}\bar{\Xi}\{\Delta\}} \, h^{\bar{\Gamma}\bar{\Omega}\bar{\Delta}\bar{\Xi}} = \frac{\cancel{(n-2)}!\,\cancel{(n-2)}!}{4\cancel{(n-2)}!\,\cancel{(n-2)}!} \, \delta^{\Omega\Gamma}_{\bar{\Omega}\bar{\Gamma}} \, \delta^{\Delta\Xi}_{\bar{\Delta}\bar{\Xi}} \times$$

$$\times \quad h^{\bar{\Gamma}\bar{\Omega}\bar{\Delta}\bar{\Xi}} = \frac{1}{4} \, \delta^{\Omega\Gamma}_{\bar{\Omega}\bar{\Gamma}} \, (h^{\bar{\Gamma}\bar{\Omega}\Delta\Xi} - h^{\bar{\Gamma}\bar{\Omega}\Xi\Delta}) = \frac{1}{2} \, \delta^{\Omega\Gamma}_{\bar{\Omega}\bar{\Gamma}} \, h^{\bar{\Gamma}\bar{\Omega}\Delta\Xi} =$$

$$= \quad \frac{1}{2} \, (h^{\Gamma\Omega\Delta\Xi} - h^{\Omega\Gamma\Delta\Xi}) = h^{\Gamma\Omega\Delta\Xi} \quad ; \quad h^{\Gamma\Omega\Delta\Xi} = e^{\Omega\Gamma\{\Gamma\}} \times$$

$$\times \quad e^{\Delta\Xi\{\Delta\}} \, A_{\{\Gamma\}\{\Delta\}} \, . \qquad (2.2.10)$$

por (2.2.7) teremos:

$$T^{\Omega\Delta} = e^{\Omega\Gamma\{\Gamma\}} \quad e^{\Delta\Xi\{\Delta\}} \quad A_{\{\Gamma\}\{\Delta\},\Gamma\Xi} \qquad (2.2.11)$$

onde $\underset{\sim}{A}$, por (2.2.9), tem as seguintes propriedades:

(1) $A_{\{\Gamma\}\{\Delta\}} = A_{\{\Delta\}\{\Gamma\}}$; (2.2.12)

(2) $\underset{\sim}{A}$ é anti-simétrico com relação a quaisquer pares de índices dos grupos $\{\Gamma\}$ ou $\{\Delta\}$.

Essa forma de representar a solução $\underset{\sim}{h}$, aparece sem demonstração em Morinaga & Nōno[4](1950).

Devido a sua semelhança com a representação de Beltrami [2], iremos denominá-la de *Representação de Beltrami para o espaço n-dimensional.*

Para n=4 vem $\{\Delta\} = \{\Delta\Sigma\}$ e $\{\Gamma\} = \{\Gamma\Omega\}$; para $\underset{\sim}{A}$, decorrente de $(2.2.12)^1$ temos:

$$A_{\Omega\Gamma\Delta\Sigma} = A_{\Delta\Sigma\Omega\Gamma} \;;$$

e de $(2.2.12)^2$:

$$A_{\Omega\Gamma\Delta\Sigma} = - A_{\Gamma\Omega\Delta\Sigma} = - A_{\Omega\Gamma\Sigma\Delta} \,,$$

e,

$$T^{\Omega\Delta} = e^{\Omega\Gamma\psi\phi} \; e^{\Delta\Xi\Sigma\Lambda} \; A_{\psi\phi\Sigma\Lambda,\Gamma\Xi} \qquad (2.2.13)$$

(Truesdell - 1959).

Para n=3, de $(2.2.12)^1$ vem:

$$A_{st} = A_{ts} \;;$$

e,

$$T^{km} = e^{kst} \; e^{mpr} \; A_{tr,sp} \qquad (2.2.14)$$

(Beltrami - 1892).

Quanto a questão da continuidade de $\underset{\sim}{A}$, para $\underset{\sim}{T} \varepsilon C^N(R)$ $N \geqslant 1$, deveremos ter $\underset{\sim}{A} \varepsilon C^{N+2}(R)$.

Como será visto adiante, como decorrência de (2. .2.8) e de expressões posteriores, $\underset{\sim}{A}$ será único a menos de um campo $\underset{\sim}{{}_oA}$ tal que:

$$e^{\Omega\Gamma\{\Gamma\}} \; e^{\Delta\Xi\{\Delta\}} \; {}_oA_{\{\Gamma\}\{\Delta\},\Gamma\Xi} = \underset{\sim}{0}.$$

Deve-se ainda observar que se $\underset{\sim}{T}$ tem a Representação de Beltrami em $R \subset \mathbb{E}^n$, então $\underset{\sim}{T}$ é equilibrado em R; pois (2.2.11) é solução da equação $\text{div}\,\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$; $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^T$ em R.

CAPÍTULO III

COMPLEMENTAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO DE BELTRAMI

3.1 TEOREMAS SOBRE REGIÕES PERIFRÁTICAS

A representação (2.2.11) originou-se da construção de um campo tensorial $\underset{\sim}{A}$, de ordem 2(n-2), a partir da solução $\underset{\sim}{h}$ da equação div $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$, sem levar em consideração a natureza da região R sobre a qual foi suposta válida a representação.

Poderemos ver contudo, que dependendo da natureza de R, a representação de Beltrami perde a sua generalidade.

Se admitirmos que R é uma região não-perifrática e $\underset{\sim}{T}$ é um campo tensorial equilibrado em R, então pelo teorema de Green vem imediatamente que:

$$\underset{\sim}{L}(S) = \int_S \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{n}\, dA = \int_R \operatorname{div} \underset{\sim}{T}\, dV_n = \underset{\sim}{0} \; ; \qquad S = \partial R$$

V = medida do volume de R.

Assim, se R fôr não-perifrática todo campo equilibrado será auto-equilibrado. Conclui-se então, que se existir campo equilibrado em R, que não seja auto-equilibrado, R será necessariamente perifrática.

Se, por outro lado, R fôr perifrática, então pode-se exibir um campo equilibrado que não é auto-equilibrado em R. Seja:

$$\underset{\sim}{T} = \frac{\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x} (\underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{x})}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}} \; ; \quad \text{com } |\underset{\sim}{x}| \neq 0; \quad \underset{\sim}{\lambda} = \text{const.} \neq \underset{\sim}{0}$$

e $n > 2$; n = dimensão do espaço; para todo ponto de R (ver Apêndice A), div $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$.

Calculemos agora a integral:

$$\underset{\sim}{L}(S) = \int_S \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{n}\, dA \; ; \quad \text{onde } S = \partial B \; ;$$

B é uma bola-n com centro na origem.

O campo de vetores normais a fronteira de R sobre ∂B é: $\underset{\sim}{n} = -\dfrac{\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|}$ e:

$$\underset{\sim}{L}(S) = \int_S \frac{\underset{\sim}{\lambda}.\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{x})}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}}\underset{\sim}{n}\, dA = -\int_S \frac{\underset{\sim}{\lambda}.\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{x})\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+3}}\, dA =$$

$$= -\int_S \frac{\underset{\sim}{\lambda}.\underset{\sim}{x}\ |\underset{\sim}{x}|^2\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+3}}\, dA = -\int_S \frac{\underset{\sim}{\lambda}.\underset{\sim}{x}\ \underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+1}}\, dA \ ;$$

resolvendo a integral (ver Apêndice B) teremos:

$$\underset{\sim}{L}(S) = -\underset{\sim}{\lambda}\ \alpha_n \ ,$$

onde α_n é o volume da bola-n unitária. Através deste exemplo, podemos concluir que:

Existem campos equilibrados que não são auto-equilibrados se e somente se R *fôr perifrática.*

O exemplo dado é uma generalização para espaços n-dimensionais de um exemplo proposto por Gurtin [2].

Se um campo T admitir a representação de Beltrami em região R, como foi visto, T é equilibrado em R. Escolhamos para a função A aseguinte forma particular: A tem todas as componentes nulas, exceto as componentes da forma: $A_{s45\ldots n\ r45\ldots n}$, e as componentes que diferirem desta por permutações sobre o grupo $\{4,5,6,\ldots,n\}$. Então T é da forma:

$$T^{km} = [(n-3)!]^2 \quad e^{ksp45\ldots n} \quad e^{mrq45\ldots n}$$

$$A_{s45\ldots n\ r45\ldots n,pq} \quad ; \quad T^{\Gamma m} = T^{m\Gamma} = 0 \ ;$$

pondo:

$$[(n-3)!]^2 \quad A_{r45\ldots n\ s45\ldots n} = a_{rs} \qquad \text{vem:}$$

$$a_{rs} = [(n-3)!]^2 \quad A_{r45\ldots n\ s45\ldots n} =$$

$$= [(n-3)!]^2 \quad A_{s45\ldots n\ r45\ldots n} = a_{sr}$$

$s,r = 1,2,3;$ temos então:

$$T^{km} = e^{ksp} \quad e^{mrq} \quad a_{sr,pq} \ .$$

Seja S uma superfície fechada de dimensão 2 contida em R, então:

$$L^k(S) = \int_S T^{km} n_m \, dA = \int_S e^{ksp} \; e^{mrq} \; a_{rs,pq} \; n_m \, dA \; ;$$

pondo:

$$e^{ksp} \; a_{rs,p} = b^k_r$$

vem a integral:

$$L_k(S) = \int_S e^{mrq} \; b^k_{r,q} \; n_m \, dA = \int_S \text{rot} \; \underset{\sim}{b}^k . \underset{\sim}{n} \; dA$$

que por corolário do teorema de Stokes é nula.

Pode-se então enunciar o seguinte:

Seja $\underset{\sim}{T}$ *um campo tensorial, o qual admite a representação de Beltrami do* $\mathbb{E}^n$*; suponha-se* $\underset{\sim}{A}$ *tal que os únicos componentes não nulos são do tipo:* $A_{s_{45\ldots n}\, r_{45\ldots n}}$ *ou diferem deste por permutações do conjunto* $\{4,5,\ldots,n\}$*; Então* $\underset{\sim}{T}$ *é auto-equilibrado em superfície fechada* S *de dimensão* 2 *contida em* R.

Como todo campo que satisfaz as condições do teorema citado é auto-equilibrado em superfície fechada S contida em R, ou seja, sendo R perifrática e, como podemos exibir um campo equilibrado que não seja auto-equilibrado em bola-3 contida em R, poderemos afirmar o seguinte:

Seja R *uma região perifrática do espaço euclideano n-dimensional. Então existem campos equilibrados que não admitem a Representação de Beltrami n-dimensional em* R.

3.2 REPRESENTAÇÃO GENERALIZADA DE BELTRAMI PARA O ESPAÇO EUCLIDIANO N-DIMENSIONAL.

Independentemente da Representação de Beltrami n-dimensional, pode-se ter um campo equilibrado em R com a propriedade de ser bi-harmônico.

Seja $\underset{\sim}{\psi}$ um campo vetorial bi-harmônico em R, ou seja:

$$\underset{\sim}{\psi} \in C^4(R) \quad e \quad \nabla^4 \underset{\sim}{\psi} = \underset{\sim}{0} \quad \text{em } R,$$

então é verdadeira a afirmação de que:

$$\underset{\sim}{T} = \nabla^2(\nabla\underset{\sim}{\psi} + \nabla\underset{\sim}{\psi}^T) - \nabla\nabla(\nabla.\underset{\sim}{\psi}) \tag{3.2.1}$$

é equilibrado em R e mais ainda, $\underset{\sim}{T}$ é bi-harmônico em R.

Temos:

$$\nabla.\underset{\sim}{T} = \nabla^2\ [\nabla.(\nabla\underset{\sim}{\psi})] + \nabla^2\ [\nabla.(\nabla\underset{\sim}{\psi})^T] - \nabla.[\nabla\nabla(\nabla.\underset{\sim}{\psi})]\ ;$$

$$\nabla.(\nabla\underset{\sim}{\psi}) = \nabla^2\underset{\sim}{\psi}\quad ;\quad \nabla.(\nabla\underset{\sim}{\psi})^T = \nabla(\nabla.\underset{\sim}{\psi})\quad ;$$

$$\nabla.[\nabla\nabla(\nabla.\underset{\sim}{\psi})] = \nabla^2\ [\nabla(\nabla.\underset{\sim}{\psi})]$$

substituindo as identidades temos:

$$\text{div}\ \underset{\sim}{T} = \nabla^4\underset{\sim}{\psi} + \nabla^2[\nabla(\nabla.\underset{\sim}{\psi})] - \nabla^2[\nabla(\nabla.\underset{\sim}{\psi})] = \nabla^4\underset{\sim}{\psi} = \underset{\sim}{0}$$

adicionalmente:

$$\nabla^4\underset{\sim}{T} = \nabla^2[\nabla(\nabla^4\underset{\sim}{\psi}) + \nabla(\nabla^4\underset{\sim}{\psi})^T] - \nabla\nabla[\nabla.(\nabla^4\underset{\sim}{\psi})] = \underset{\sim}{0}$$

Este último resultado nos prova ser a representação (3.2.1) incompleta; no sentido de que essa representa somente campos equilibrados bi-harmônicos em R.

Seguindo o trabalho de Gurtin vamos construir a seguinte representação:

$$\underset{\sim}{T} = e^{\Omega\Lambda\{\Gamma\}} \; e^{\Delta\Xi\{\Sigma\}} \; A_{\{\Gamma\}\{\Sigma\},\Lambda\Xi} \; \underset{\sim}{e}_{\Omega} \otimes \underset{\sim}{e}_{\Delta} \; +$$

$$+ \; \nabla^2(\nabla\underset{\sim}{\psi} + \nabla\underset{\sim}{\psi}^T) - \nabla\nabla(\nabla.\underset{\sim}{\psi}) \qquad (3.2.2)$$

onde $A_{\{\Gamma\}\{\Sigma\}} = A_{\{\Sigma\}\{\Gamma\}}$; $\underset{\sim}{A}$ é anti-simétrico relativamente a qualquer permutação sobre os índices dos grupos $\{\Gamma\}$ e $\{\Sigma\}$; $\underset{\sim}{A} \in C^3(R)$; $\underset{\sim}{\psi} \in C^4(R)$ e $\nabla^4\underset{\sim}{\psi} = \underset{\sim}{0}$ em R. Todo campo que admitir essa representação será dito admitir a *Representação de Beltrami-Gurtin* para o espaço euclidiano n-dimensional.

Vamos provar agora que a todo campo equilibrado suficientemente contínuo em R, está associada a representação (3.2.2) na mesma região.

Com efeito, vamos introduzir o seguinte Lema:

Seja $R \subset \mathbb{E}^n$, $n \geqslant 3$, *uma região mensurável e, seja* $f \in C^0(\bar{R})$, $f \in C^N(R)$, $N \geqslant 1$; $f: R \to \mathbb{R}$. *Então a equação* $\nabla^4 g = f$ *tem solução* $g \in C^{N+2}(R)$.

Uma outra forma do Lema é a seguinte:

Se $f \in C^0(\bar{R})$ *e* f *tem derivada Hölder-contínua de ordem* N *em* R; *então* $\nabla^4 g = f$ *terá solução* g $(N+4)$ *vezes Hölder-continuamente diferenciável em* R. Esta forma é decorrência da desigualdade de Korn-Lichtenstein [15].

Prova: Define-se

$$\rho(\underset{\sim}{x}) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_R \frac{f(\underset{\sim}{\eta})}{|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\eta}|^{n-2}}\, dV_n$$

e:

$$g(\underset{\sim}{x}) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_R \frac{\rho(\underset{\sim}{\eta})}{|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\eta}|^{n-2}}\, dV_n$$

ω_n = medida da fronteira da Bola-n unitária; ρ e g assim definidas são de classe $C^{N+1}(R)$ e $C^{N+2}(R)$ respectivamente;

$\nabla^2\rho = f$; $\nabla^2 g = \rho$ e, consequentemente, $\nabla^4 g = f$. Este procedimento decorre da aplicação sucessiva do teorema contido em Courant & Hilbert [13], Helwig, G [10].

Pelo Lema, se $\nabla.\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$, $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^T$ em R e $\underset{\sim}{T} \in C^3(R)$; então existe campo tensorial $\underset{\sim}{f}$; $\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{f}^T$; $\underset{\sim}{f} \in C^5(R)$ tal que $\nabla^4\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{T}$; ainda; de $\nabla.\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$ vem $\nabla^4(\nabla.\underset{\sim}{f}) = \underset{\sim}{0}$; $\underset{\sim}{f}$ é dado pela matriz $\{f^{\Omega\Delta}\}$.

Da outra forma do lema; se $\underset{\sim}{T}$ é Hölder- continuamente diferenciável em R, então $\underset{\sim}{f}$ será cinco vezes Hölder--contínuamente diferenciável em R [5].

Adicionalmente temos a seguinte identidade:

$$\frac{1}{[(n-2)!]^2} \; e^{\Omega\Gamma\{\Delta\}} \; e^{\Delta\Xi\{\Gamma\}} \; e_{\{\Delta\}\Lambda\Sigma} \; e_{\{\Gamma\}\phi\psi} \; f^{\Sigma\psi,\Lambda\phi}_{\quad\;\;,\Xi\Gamma} =$$

$$= \nabla^4 f^{\Omega\Delta} + (f^{\Gamma\Xi}_{,\Gamma\Xi})^{,\Omega\Delta} - \nabla^2\left[(f^{\Delta\Gamma}_{,\Gamma})^{,\Omega} + (f^{\Omega\Xi}_{,\Xi})^{,\Delta}\right] \quad (3.2.3)$$

Com efeito:

$$\frac{1}{[(n-2)!]^2} \; e^{\Omega\Gamma\{\Delta\}} \; e^{\Delta\Xi\{\Gamma\}} \; e_{\{\Delta\}\Lambda\Sigma} \; e_{\{\Gamma\}\phi\psi} \; f^{\Sigma\psi,\Lambda\phi}_{\quad ,\Xi\Gamma} =$$

$$= \frac{\cancel{(n-2)}!}{[\cancel{(n-2)!}]^2} \; \delta^{\Omega\Gamma}_{\Lambda\Sigma} \; \cancel{(n-2)}! \; \delta^{\Delta\Xi}_{\phi\psi} \; f^{\Sigma\psi,\Lambda\phi}_{\quad ,\Xi\Gamma} =$$

$$= \delta^{\Omega\Gamma}_{\Lambda\Sigma} \; \delta^{\Delta\Xi}_{\phi\psi} \; f^{\Sigma\psi,\Lambda\phi}_{\quad ,\Xi\Gamma} = \delta^{\Omega\Gamma}_{\Lambda\Sigma} \; (f^{\Sigma\Xi,\Lambda\Delta}_{\quad ,\Xi\Gamma} - f^{\Sigma\Delta,\Lambda\Xi}_{\quad ,\Xi\Gamma}) =$$

$$= (f^{\Gamma\Xi,\Omega\Delta}_{\quad ,\Xi\Gamma} - f^{\Gamma\Delta,\Omega\Xi}_{\quad ,\Xi\Gamma}) - (f^{\Omega\Xi,\Gamma\Delta}_{\quad ,\Xi\Gamma} - f^{\Omega\Delta,\Gamma\Xi}_{\quad ,\Gamma\Xi}) =$$

$$= f^{\Omega\Delta,\Gamma\Xi}_{\quad ,\Gamma\Xi} - \left[\left[(f^{\Delta\Gamma}_{\;,\Gamma})^{,\Omega} \right]^{,\Xi}_{,\Xi} + \left[(f^{\Omega\Xi}_{\;,\Xi})^{,\Delta} \right]^{,\Gamma}_{,\Gamma} \right] +$$

$$+ (f^{\Gamma\Xi}_{\;,\Gamma\Xi})^{,\Omega\Delta} = \nabla^4 f^{\Omega\Delta} - \nabla^2 \left[(f^{\Delta\Gamma}_{\;,\Gamma})^{,\Omega} + (f^{\Omega\Xi}_{\;,\Xi})^{,\Delta} \right] + (f^{\Gamma\Xi}_{\;,\Gamma\Xi})^{,\Omega\Delta} .$$

Transpondo os termos da identidade chega-se a seguinte expressão:

$$\nabla^4 f^{\Omega\Delta} = \frac{1}{[(n-2)!]^2} \; e^{\Omega\Gamma\{\Delta\}} \; e^{\Delta\Xi\{\Gamma\}} \; e_{\{\Delta\}\Lambda\Sigma} \; e_{\{\Gamma\}\phi\psi} \; f^{\Sigma\psi,\Lambda\phi}_{\quad ,\Xi\Gamma} +$$

$$+ \quad \nabla^2 \left[(f^{\Delta\Gamma}_{,\Gamma})^{,\Omega} + (f^{\Omega\Xi}_{,\Xi})^{,\Delta} \right] - (f^{\Gamma\Xi}_{,\Gamma\Xi})^{,\Omega\Delta} \quad ;$$

pondo:

$$A_{\{\Delta\}\{\Gamma\}} = \frac{1}{[(n-2)!]^2} \; e_{\{\Delta\}\Lambda\Sigma} \; e_{\{\Gamma\}\phi\psi} \; f^{\Sigma\psi,\Lambda\phi} \qquad (3.2.4)$$

as condições $(2.2.12)^1$ e $(2.2.12)^2$ são satisfeitas e, $\underset{\sim}{A} \in C^3(R)$.

Se definirmos $\underset{\sim}{\psi}$ por: $\underset{\sim}{\psi} = \nabla.\underset{\sim}{f}$; $\psi^{\Omega} = f^{\Omega\Gamma}_{,\Gamma}$; $\nabla.\underset{\sim}{\psi} = \nabla.(\nabla.\underset{\sim}{f}) = f^{\Omega\Xi}_{,\Omega\Xi}$; $\nabla^4\underset{\sim}{\psi} = \nabla^4(\nabla.\underset{\sim}{f}) = \underset{\sim}{0}$ e $\underset{\sim}{\psi} \in C^4(R)$. Substituindo $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{\psi}$ na identidade, teremos para $\underset{\sim}{T}$ a seguinte representação:

$$T^{\Omega\Delta} = e^{\Omega\Gamma\{\Delta\}} \; e^{\Delta\Xi\{\Gamma\}} \; A_{\{\Delta\}\{\Gamma\},\Gamma\Xi} \quad +$$

$$+ \quad \nabla^2(\psi^{\Omega,\Delta} + \psi^{\Delta,\Omega}) - (\nabla.\underset{\sim}{\psi})^{,\Omega\Delta}$$

que é a equação (3.2.2) em componentes.

Dos resultados obtidos podemos enunciar o seguinte teorema:

Seja $R \subset \mathbb{E}^n$ *uma região mensurável e seja* $\underset{\sim}{T}$ *um campo tensorial equilibrado em* $\bar{R}$, *adicionalmente se* $\underset{\sim}{T} \in C^3(R)$ *então* $\underset{\sim}{T}$ *admite a Representação de Beltrami-Gurtin em* R; *isto é; existe campo tensorial* $\underset{\sim}{A} \in C^3(R)$; *com as propriedades:* $A_{\{\Delta\}\{\Gamma\}} = A_{\{\Gamma\}\{\Delta\}} = A_{\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_{n-2}\ \Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{n-2}}$ *e* $\underset{\sim}{A}$ *é anti-simétrico relativamente a pares de índices dos conjuntos* $\{\Delta\}$ *e* $\{\Gamma\}$; *e existe campo vetorial* $\underset{\sim}{\psi} \in C^4(R)$ $\underset{\sim}{\psi}$ *bi-harmônico em* R *tais que:*

$$\underset{\sim}{T} = e^{\Omega\Gamma\{\Gamma\}} \; e^{\Delta\Xi\{\Delta\}} \; A_{\{\Gamma\}\{\Delta\},\Gamma\Xi} \; \underset{\sim}{e}_\Omega \otimes \underset{\sim}{e}_\Delta \quad +$$

$$+ \quad \nabla^2(\nabla\underset{\sim}{\psi} + \nabla\underset{\sim}{\psi}^T) - \nabla\nabla(\nabla.\underset{\sim}{\psi})$$

Este teorema é uma generalização do teorema de Helmholtz, o qual decompõe campos vetoriais em campos harmônicos e campos cuja integral sobre superfície fechada é nula.

Podemos extender o resultado acima para o caso não homogêneo:

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{F} \; ; \quad \underset{\sim}{F} \in C^0(R) \qquad \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^T \quad \text{em} \quad R \qquad (3.2.5)$$

Basta para isto, adicionar à solução geral da equação homogênea associada a (3.2.5)[1], uma solução particular da equação não homogênea. Uma tal solução pode ser do tipo (3.2.1), desde que se tome $\nabla^4 \underset{\sim}{\psi} = \underset{\sim}{F}$ em R; (Gurtin-1963).

Como foi comentado anteriormente, o campo $\underset{\sim}{A}$ da representação (3.2.2) é único a menos de um campo ${}_o\underset{\sim}{A}$ tal que:

$$e^{\Omega\Gamma\{\Delta\}} \; e^{\Delta\Xi\{\Gamma\}} \; {}_oA_{\{\Delta\}\{\Gamma\},\Gamma\Xi} = 0.$$

Representando ${}_o\underset{\sim}{A}$ por (3.2.4); ${}_o\underset{\sim}{\psi} = \nabla . {}_o\underset{\sim}{f}$ e usando a identidade (3.2.3) vem:

$$e^{\Omega\Gamma\{\Delta\}} \; e^{\Delta\Xi\{\Gamma\}} \; {}_oA_{\{\Delta\}\{\Gamma\},\Xi\Gamma} \; e_\Omega \otimes e_\Delta =$$

$$= \nabla^4 {}_o\underset{\sim}{f} - \nabla^2 \left[\nabla(\nabla . {}_o\underset{\sim}{f}) + \nabla(\nabla . {}_o\underset{\sim}{f}) \right] - \nabla\nabla \left[\nabla . (\nabla . {}_o\underset{\sim}{f}) \right] .$$

Para que se determine um tal ${}_o\underset{\sim}{A}$, basta escolher um campo ${}_{0}\underset{\sim}{f}$ tal que $\nabla . {}_{0}\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{0}$ e $\nabla^4 {}_{0}\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{0}$.

Para isto, toma-se componentes de ${}_{0}\underset{\sim}{f}$, funções ${}_{0}f^{\Omega\Delta}$ do tipo:

$${}_{0}f^{\Omega\Delta} = {}_{0}f^{\Omega\Delta}\,(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^{\Delta-1},\ x^{\Delta+1},\ \ldots,\ x^n)\ ;$$

deste modo: $f^{\Omega\Delta}_{\ ,\Delta} = 0$, num sistema de coordenadas carte ianas.

Para que ${}_{0}\underset{\sim}{f}$ satisfaça a segunda condição, basta restringir as funções $f^{\Omega\Delta}$ a classe das funções polinômias homogêneas do 3º grau.

3.3 SIMPLIFICAÇÃO DO POTENCIAL $\underset{\sim}{A}$

A expressão (3.2.2) para o espaço euclidiano tetra-dimensional é a seguinte:

$$\underset{\sim}{T} = e^{\Omega\Gamma\Lambda\Sigma}\, e^{\Delta\Xi\phi\psi}\, A_{\Lambda\Sigma\phi\psi,\Xi\Gamma}\, \underset{\sim}{e}_{\Omega} \otimes \underset{\sim}{e}_{\Delta} + \nabla^2(\nabla\underset{\sim}{\psi} + \nabla\underset{\sim}{\psi}^T) -$$

$$- \nabla\nabla(\nabla . \underset{\sim}{\psi})\ ; \quad \text{onde} \quad \underset{\sim}{\psi} = \{\psi^1,\ \psi^2,\ \psi^3,\ \psi^4\}. \quad (3.2.6)$$

Poderemos obter a partir desta representação, a representação de Gurtin para o $\mathbb{E}^3$, escolhendo convenientemente $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{\psi}$: Se escolhermos um $\underset{\sim}{A}$, tal que os únicos componentes não nulos são da forma: A_{s4q4} ; $s,q = 1,2,3$, com: $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}(x^1,x^2,x^3)$, e um $\underset{\sim}{\psi}$ tal que:

$$\underset{\sim}{\psi} = \underset{\sim}{\psi}\,(x^1,\ x^2,\ x^3) = \{\psi^1,\ \psi^2,\ \psi^3,\ \psi^4\}\ ;\quad \psi^4 = \text{const.};$$

redefinindo $\underset{\sim}{A}$ por: $a_{sq} = A_{s4q4}$, teremos a simetria: $a_{sq} = a_{qs}$. Com a escolha acima teremos:

$$T^{km} = e^{ksp}\ e^{mrq}\ a_{rs,pq} + \nabla^2(\psi^{k,m} + \psi^{m,k}) - (\nabla.\underset{\sim}{\psi})^{,km}$$

que é a representação tri-dimensional de Gurtin.

Convem observar que a representação (3.2.2) para o espaço n-dimensional contem as representações de seus subespaços. Essas representações são obtidas fixando-se restrições sobre $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{\psi}$ conforme o exemplo anterior.

A representação (3.2.6), com $\underset{\sim}{A}$ definido por (3.2.4), nos leva a seguinte questão: Qual seria a forma de

$\underset{\sim}{f}$ de modo a termos $\underset{\sim}{A}$ na forma particular:

A_{4t4r} seja diagonal; (3.2.7)

$A_{stqr} = 0$ se $s \neq q$ ou $t \neq r$ e $A_{4stq} = 0$?

Escrevendo todos os componentes de $\underset{-}{A}$ temos:

A_{4142}, A_{4143}, A_{4243}, A_{4123}, A_{4312}, A_{4231}

A_{4223}, A_{4112}, A_{4113}, A_{4221}, A_{4331}, A_{4332}

A_{2312}, A_{2313} e A_{2321} todos nulos;

A_{4141}, A_{4242}, A_{4343}, A_{1212} e A_{1313} não todos nulos.

Teremos, consequentemente, o conjunto de vinte condições:

$$A_{4141} = f^{22,33} + f^{33,22} - 2\,f^{23,23}$$

$$A_{4242} = f^{33,11} + f^{11,33} - 2\,f^{13,13}$$

$$A_{4343} = f^{11,22} + f^{22,11} - 2\,f^{12,12}$$

$$A_{1212} = f^{44,33} + f^{33,44} - 2\,f^{34,34}$$

$$A_{1313} = f^{22,44} + f^{44,22} - 2\,f^{24,24}$$

$$A_{2323} = f^{44,11} + f^{11,44} - 2\,f^{14,14}$$

não todos nulos;

e:

$$A_{4142} = f^{23,13} + f^{13,23} - f^{21,33} - f^{33,12} = 0$$

$$A_{4143} = f^{21,32} + f^{32,21} - f^{22,31} - f^{31,22} = 0$$

$$A_{4243} = f^{31,12} + f^{12,31} - f^{11,32} - f^{32,11} = 0$$

$$A_{4123} = f^{24,31} + f^{31,24} - f^{21,34} - f^{34,21} = 0$$

$$A_{4342} = f^{14,23} + f^{23,14} - f^{13,24} - f^{24,13} = 0$$

$$A_{4231} = f^{34,12} + f^{12,34} - f^{14,32} - f^{32,14} = 0$$

$$A_{4223} = f^{34,11} + f^{11,34} - f^{31,14} - f^{14,31} = 0$$

$$A_{4331} = f^{14,22} + f^{22,14} - f^{12,24} - f^{24,12} = 0$$

$$A_{4113} = f^{22,43} + f^{43,22} - f^{23,42} - f^{42,23} = 0$$

$$A_{4332} = f^{11,24} + f^{24,11} - f^{14,21} - f^{21,14} = 0$$

$$A_{4221} = f^{33,14} + f^{14,33} - f^{34,13} - f^{13,34} = 0$$

$$A_{4112} = f^{24,33} + f^{33,24} - f^{23,34} - f^{34,23} = 0$$

$$A_{1213} = f^{42,34} + f^{34,42} - f^{44,32} - f^{32,44} = 0$$

$$A_{2331} = f^{44,12} + f^{12,44} - f^{42,14} - f^{14,42} = 0$$

Se tomarmos para $\underset{\sim}{f}$, em um particular sistema de coordenadas cartesianas a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} f^{11}(x^4) & f^{12}(x^1, x^2) & f^{13}(x^1, x^3) & f^{14}(x^1, x^4) \\ f^{21}(x^1, x^2) & f^{22}(x^3) & f^{23}(x^2, x^3) & f^{24}(x^2, x^4) \\ f^{31}(x^1, x^2) & f^{32}(x^3, x^2) & f^{33}(x^1) & f^{34}(x^3, x^4) \\ f^{41}(x^1, x^4) & f^{42}(x^2, x^4) & f^{43}(x^3, x^4) & f^{44}(x^2) \end{bmatrix}$$

com as expressões: $f^{33,11} - 2\, f^{13,13}$;

$f^{11,44} - 2\, f^{14,14}$; $f^{22,33} - 2\, f^{23,23}$;

$f^{44,22} - 2\, f^{24,24}$; $f^{34,34}$ e $f^{12,12}$ não todas

identicamente nulas, as condições (3.2.7) serão satisfeitas.

Do mesmo modo, para a representação tri-dimensional de Gurtin, escolhendo um $\underset{\sim}{f}$ com a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} f^{11}(x^2) & f^{12}(x^1, x^2) & f^{13}(x^1, x^3) \\ f^{21}(x^1, x^2) & f^{22}(x^3) & f^{23}(x^2, x^3) \\ f^{31}(x^1, x^3) & f^{32}(x^2, x^3) & f^{33}(x^1) \end{bmatrix}$$

com as expressões:

$$f^{22,33} - 2\, f^{23,23} \quad ; \quad f^{33,11} - 2\, f^{13,13}$$

e $f^{11,22} - 2\, f^{12,12}$ não todas identicamente nulas, te̲remos para $\underset{\sim}{a}$ a seguinte representação:

$$(a_{rs}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Convem observar ainda que as simplificações dos potenciais são válidas somente para um particular sistema de coordenadas, isto é, não são invariantes no espaço.

CAPÍTULO IV

FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO PARA O ESPAÇO-TEMPO TETRA-DIMENSIONAL

4.1 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

As equações de campo para os meios contínuos são:

$$\rho \ddot{\underset{\sim}{x}} = \rho \underset{\sim}{f} + \operatorname{div} \underset{\sim}{T} \; ; \quad \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^{T} \quad \text{equação do movimento} \tag{4.1.1}$$

onde: $\ddot{\underset{\sim}{x}} = \dfrac{\partial \dot{\underset{\sim}{x}}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \dot{\underset{\sim}{x}})\, \dot{\underset{\sim}{x}}$ campo da aceleração

$\dot{\underset{\sim}{x}}$ = campo da velocidade

ρ = campo da massa específica

$\underset{\sim}{f}$ = campo externo (fôrça por unidade de massa)

$\underset{\sim}{T}$ = campo das tensões internas.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\,(\rho \dot{\underset{\sim}{x}}) = 0 \quad \text{equação da continuidade} \tag{4.1.2}$$

Por (4.1.1)[3] e (4.1.2) e usando a identidade:

$$\operatorname{div}\,(\rho \dot{\underset{\sim}{x}} \otimes \dot{\underset{\sim}{x}}) = \rho(\operatorname{grad}\, \dot{\underset{\sim}{x}})\dot{\underset{\sim}{x}} + \dot{\underset{\sim}{x}}\, \operatorname{div}\,(\rho \dot{\underset{\sim}{x}})$$

pode-se escrever o seguinte:

$$\operatorname{div}\,(\underset{\sim}{T} - \rho \dot{\underset{\sim}{x}} \otimes \dot{\underset{\sim}{x}}) = \frac{\partial}{\partial t}\,(\rho \dot{\underset{\sim}{x}}) - \rho \underset{\sim}{f}$$

onde:

$$(\underset{\sim}{T} - \rho \dot{\underset{\sim}{x}} \otimes \dot{\underset{\sim}{x}}) = (T - \rho \dot{\underset{\sim}{x}} \otimes \dot{\underset{\sim}{x}})^T. \tag{4.1.3}$$

Pode-se escrever a equação (4.1.3)[1] numa forma mais simples sob o ponto de vista do Espaço-Tempo tetra-dimensional, o qual apresentaremos a seguir.

4.2 ESPAÇO-TEMPO TETRA-DIMENSIONAL

Seguindo o formalismo de Gurtin[3], define-se o es paço-tempo tetra-dimensional por: $\mathbb{E}^{(4)} = \mathbb{E}^3 \times (-\infty,\infty)$ que é o conjunto dos pontos do tipo $\underset{\sim}{X} = (\underset{\sim}{x}, t)$; $\underset{\sim}{x} \varepsilon \mathbb{E}^3$, $t \varepsilon (-\infty,\infty)$. Associado a $\mathbb{E}^{(4)}$ temos o espaço translação $\mathbb{V}^{(4)}$, defini do por $\mathbb{V}^{(4)} = \mathbb{V} \times (-\infty,\infty)$, dim $\mathbb{V} = 3$; cujos elementos são do tipo $\underset{\sim}{V} = (\underset{\sim}{v},\alpha)$; $\underset{\sim}{v} \varepsilon \mathbb{V}$, $\alpha \varepsilon (-\infty,\infty)$. Em $\mathbb{V}^{(4)}$ está defi nida de modo natural a operação (+) tal que, dados $\underset{\sim}{U} = (\underset{\sim}{u},\alpha)$ e $\underset{\sim}{V} = (\underset{\sim}{v},\beta)$, $\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{V} = (\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v}, \beta + \alpha)$. Também está defini da a multiplicação por escalar tal que se: $\lambda \varepsilon \mathbb{R}$ e $\underset{\sim}{U} \varepsilon \mathbb{V}^{(4)}$; $\underset{\sim}{U} = (\underset{\sim}{u},\alpha)$; $\lambda \underset{\sim}{U} = (\lambda \underset{\sim}{u}, \lambda\alpha)$.

A cada par de pontos $\underset{\sim}{X}$, $\underset{\sim}{Y}$ de $\mathbb{E}^{(4)}$ existe um úni co vetor $\underset{\sim}{V}$ de $\mathbb{V}^{(4)}$ tal que:

$$\underset{\sim}{V} = (\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{X}) = (\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{x}, t_y - t_x) \; ; \quad \underset{\sim}{X} = (\underset{\sim}{x}, t_x)$$

$$\underset{\sim}{Y} = (\underset{\sim}{y}, t_y) \; ; \quad \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \; \varepsilon \; V; \; t_x, t_y \; \varepsilon \; (-\infty, \infty)$$

$\mathbb{V}^{(4)}$ é espaço produto-interno sob a operação (.):

$\mathbb{V}^{(4)} \times \mathbb{V}^{(4)} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida naturalmente; se $\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{V} \; \varepsilon \; \mathbb{V}^{(4)}$

$$\underset{\sim}{U} = (\underset{\sim}{u},\alpha), \quad \underset{\sim}{V} = (\underset{\sim}{v},\beta), \quad \underset{\sim}{U}.\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{u}.\underset{\sim}{v} + \alpha\beta.$$

Um operador linear ou quadritensor, é transformação linear de $\mathbb{V}^{(4)}$ em $\mathbb{V}^{(4)}$ ou elemento de $L(\mathbb{V}^{(4)}, \mathbb{V}^{(4)})$. Associado a cada $\underset{\sim}{T} \in L(\mathbb{V}^{(4)}, \mathbb{V}^{(4)})$ existe único operador $\underset{\sim}{T} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, únicos vetores $\underset{\sim}{m}$ e $\bar{\underset{\sim}{m}} \in \mathbb{V}$ e único escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$[\underset{\sim}{T}] = \begin{bmatrix} [\underset{\sim}{T}] & [\bar{\underset{\sim}{m}}] \\ & \\ [\underset{\sim}{m}] & \lambda \end{bmatrix}$$

esta matriz é denominada de partição de $\underset{\sim}{T}$ em $\mathbb{V}^{(4)}$.

Inversamente, associado aos vetores $\underset{\sim}{m}$ e $\bar{\underset{\sim}{m}}$ de V, $\lambda \in \mathbb{R}$ e a $\underset{\sim}{T} \in L(\mathbb{V},\mathbb{V})$ existe somente um quadritensor $\underset{\sim}{T}$ representado pela matriz acima.

Define-se o transposto de $\underset{\sim}{T}$ tal que:

$$[\underset{\sim}{T}^T] = \begin{bmatrix} [\underset{\sim}{T}]^T & [\underset{\sim}{m}] \\ & \\ [\bar{\underset{\sim}{m}}] & \lambda \end{bmatrix}$$

4.2.1 Campos sobre o $\mathbb{E}^{(4)}$.

(2.1.1) Campo Escalar.

Se: $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^{(4)}$; $\phi \in C^k(\mathcal{D})$, $k \geq 1$ então

$\underset{\sim}{x} \longmapsto \phi(\underset{\sim}{x})$ ϕ é denominado de campo escalar.

O espaço das funções ϕ é denotado por: $\mathbb{E}^{(4)^{\mathbb{R}}}$.

(2.1.2) Campo Vetorial.

Se: $\underset{\sim}{V} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{V}^{(4)}$; $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^{(4)}$; $\underset{\sim}{V} \in C^k(\mathcal{D})$, $k \geq 1$ então

$\underset{\sim}{x} \longmapsto \underset{\sim}{V}(\underset{\sim}{x})$ $\underset{\sim}{V}$ é denominado de campo vetorial.

O espaço dos campos vetoriais é denotado por:

$\mathbb{E}^{(4)} \to \mathbb{V}^{(4)}$.

(2.1.3) Campo Tensorial.

$\underset{\sim}{T} : \mathcal{D} \longrightarrow L(\mathbb{V}^{(4)}, \mathbb{V}^{(4)})$; $\underset{\sim}{T} \in C^k(\mathcal{D})$, $k \geqslant 1$; é denominado de campo tensorial sobre $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^{(4)}$.

O espaço dos campos tensoriais é denotado por: $\mathbb{E}^{(4)} \to L(\mathbb{V}^{(4)}, \mathbb{V}^{(4)})$.

4.2.2 <u>Operadores vetoriais</u>

(2.1.1) Gradiente.

Seja $\phi \in \mathbb{E}^{(4)^{\mathbb{R}}}$; Define-se gradiente de ϕ por:

$$\text{grad}_{(4)} : \mathbb{E}^{(4)^{\mathbb{R}}} \longrightarrow \mathbb{E}^{(4)} \to \mathbb{V}^{(4)} \ ; \ \phi \longmapsto \text{grad}_{(4)}\, \phi =$$

$$= (\Delta\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t}) = (\phi_{,\chi_1}, \phi_{,\chi_2}, \phi_{,\chi_3}, \frac{\partial\phi}{\partial t}) :$$

Do mesmo modo: gradiente de $\underset{\sim}{V} \in \mathbb{E}^{(4)} \to \mathbb{V}^{(4)}$ é definido por: $\text{grad}_{(4)} : \mathbb{E}^{(4)} \to \mathbb{V}^{(4)} \longrightarrow \mathbb{E}^{(4)} \to L(\mathbb{V}^{(4)}, \mathbb{V}^{(4)})$;

$$\underset{\sim}{V} \longmapsto \underset{(4)}{\text{grad}}\ \underset{\sim}{V} = (\nabla \underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{e}_4 \otimes \frac{\partial \underset{\sim}{V}}{\partial t}) = (V^{r,s}\ \underset{\sim}{e}_s \otimes \underset{\sim}{e}_r,$$

$$\frac{\partial V^r}{\partial t}\ \underset{\sim}{e}_4 \otimes \underset{\sim}{e}_r);$$ $\underset{\sim}{e}_4$ é o vetor básico correspondente a dimensão do tempo.

(2.2.2) Divergência

Seja $\underset{\sim}{V} \in \mathbb{E}^{(4)} \to \mathbb{V}^{(4)}$; $\underset{\sim}{V} = (\underset{\sim}{v}, \alpha)$; define-se como divergência de $\underset{\sim}{V}$, a seguinte operação:

$$\text{div}_{(4)}: \quad \mathbb{E}^{(4)} \to \mathbb{V}^{(4)} \longrightarrow \mathbb{E}^{(4)\mathbb{R}} \;;$$

$$\underset{\sim}{V} \longmapsto \text{div}_{(4)}\ \underset{\sim}{V} = \nabla . \underset{\sim}{v} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} \,.$$

Seja $\underset{\sim}{T} \in \mathbb{E}^{(4)} \to L(\mathbb{V}^{(4)}, \mathbb{V}^{(4)})$. A $\underset{\sim}{T}$ estão associados biunivocamente: $\underset{\sim}{T}$, $\underset{\sim}{m}$, $\underset{\sim}{\bar{m}}$ e λ, onde:

$$[T] = \begin{bmatrix} [\underset{\sim}{T}] & [\underset{\sim}{\bar{m}}] \\ & \\ [\underset{\sim}{m}] & \lambda \end{bmatrix} \;;$$

$\underset{\sim}{T} \in \mathbb{E}^{(4)} \to L(\mathbb{V},\mathbb{V})$; $\underset{\sim}{m}$, $\bar{\underset{\sim}{m}} \in \mathbb{E}^{(4)} \to \mathbb{V}$ e $\lambda \in \mathbb{E}^{(4)\mathbb{R}}$.

A divergência de um campo tensorial é definida por:

$$\mathrm{div}_{(4)} : \mathbb{E}^{(4)} \to L(\mathbb{V}^{(4)}, \mathbb{V}^{(4)}) \longrightarrow \mathbb{E}^{(4)} \to \mathbb{V}^{(4)}$$

$\underset{\sim}{T} \longmapsto \mathrm{div}_{(4)}\, T$ tal que: para todo $\underset{\sim}{V} \in \mathbb{V}^{(4)}$, $\mathrm{div}_{(4)}\, (\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{V}) = \underset{\sim}{V}.\mathrm{div}_{(4)}\, \underset{\sim}{T}$.

Daí, usando a definição de divergência de campo vetorial vem:

$$\mathrm{div}_{(4)}\, (\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{V}) = \nabla.(\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{m}\, \alpha) + \frac{\partial}{\partial t}\, (\bar{\underset{\sim}{m}}.\underset{\sim}{v} + \lambda\alpha)$$

por definição:

$$\nabla.(T^T \underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{v}.(\nabla.\underset{\sim}{T}) \;; \quad \text{logo:}$$

$$\mathrm{div}_{(4)}\, (\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{V}) = \underset{\sim}{v}.(\nabla.\underset{\sim}{T} + \frac{\partial\bar{\underset{\sim}{m}}}{\partial t}) + \alpha(\nabla.\underset{\sim}{m} + \frac{\partial\lambda}{\partial t}) =$$

$$= \underset{\sim}{V}.(\nabla.\underset{\sim}{T} + \frac{\partial\bar{\underset{\sim}{m}}}{\partial t}\,,\ \nabla.\underset{\sim}{m} + \frac{\partial\lambda}{\partial t})$$

para todo $\underset{\sim}{V}$; então, pela definição acima:

$$\operatorname{div}_{(4)} \underset{\sim}{T} = \left(\nabla . \underset{\sim}{T} + \frac{\partial \bar{\underset{=}{m}}}{\partial t} \, , \, \nabla . \underset{\sim}{m} + \frac{\partial \lambda}{\partial t}\right)$$

4.3 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO NO ESPAÇO-TEMPO

Pelas considerações anteriores, associado a:

$$\underset{\sim}{T} - \rho \, \dot{\underset{\sim}{x}} \otimes \dot{\underset{\sim}{x}} \in \mathbb{E}^3 \to L(\mathbb{V},\mathbb{V}), \; - \rho \, \dot{\underset{\sim}{x}} \in \mathbb{E}^3 \to \mathbb{V} \text{ e } - \rho \in \mathbb{E}^{3}\mathbb{R},$$

existe um único campo tensorial $\underset{\sim}{T} - \rho \, \dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}} \in$

$$\mathbb{E}^{(4)} \to L(\mathbb{V}^{(4)}, \mathbb{V}^{(4)}), \text{ com } \underset{\sim}{X} = (\underset{\sim}{x}, t) \in \mathbb{E}^{(4)} ,$$

$$\dot{\underset{\sim}{X}} = (\dot{\underset{\sim}{x}}, 1) \in \mathbb{E}^{(4)} \to \mathbb{V}^{(4)}, \quad \underset{\sim}{T} \in \mathbb{E}^{(4)} \to L(\mathbb{V}^{(4)}, \mathbb{V}^{(4)}),$$

tal que:

$$[\underset{\sim}{T}] = \begin{bmatrix} [\underset{\sim}{T}] & [0] \\ & \\ [0] & 0 \end{bmatrix}$$

e:

$$[\underset{\sim}{T} - \rho\, \dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}}] = \begin{bmatrix} [\underset{\sim}{T} - \rho\, \dot{\underset{\sim}{x}} \otimes \dot{\underset{\sim}{x}}] & [-\rho\, \dot{\underset{\sim}{x}}] \\ & \\ [-\rho\, \dot{\underset{\sim}{x}}] & -\rho \end{bmatrix}$$

Pela definição de divergência no espaço-tempo temos:

$$\operatorname{div}_{(4)} [\underset{\sim}{T} - \rho\, \dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}}] = (\operatorname{div}(\underset{\sim}{T} - \rho\, \dot{\underset{\sim}{x}} \otimes \dot{\underset{\sim}{x}}) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} (\rho\dot{\underset{\sim}{x}}),\ - \frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho\dot{\underset{\sim}{x}})) = (-\rho\, \underset{\sim}{f},\ 0)\ ;$$

Em consequência, pode-se escrever a equação do movimento na seguinte forma:

$$\operatorname{div}_{(4)} (\underset{\sim}{T} - \rho\, \dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}}) = -\rho\, \underset{\sim}{f} \quad \text{com} \quad \underset{\sim}{f} = \{f^1, f^2, f^3, 0\} \tag{4.3.1}$$

Por hipótese, admitiremos que $\underset{\sim}{T} - \rho\, \dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}}$ seja continuamente diferenciável em região R do $\mathbb{E}^{(4)}$.

Supondo-se existir $\phi = \phi(\underset{\sim}{x})$, tal que $\underset{\sim}{f} = \{-\nabla\phi, 0\}$, e usando a identidade:

$$\rho \; \text{grad}_{(4)} \phi = \text{div}_{(4)} (\rho \, \phi \, \underset{\sim}{I}) - \phi \; \text{grad}_{(4)} \rho$$

onde $\underset{\sim}{I}$ é a identidade de $L(\mathbb{V}^{(4)}, \mathbb{V}^{(4)})$, chega-se a seguinte equação:

$$\text{div}_{(4)} \left[\underset{\sim}{T} - \rho(\dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}} + \phi \, \underset{\sim}{I})\right] = - \phi \; \text{grad}_{(4)} \rho \, , \tag{4.3.2}$$

A preferência em usar-se uma ou outra forma dependerá da particularidade do material ou do movimento, como será visto posteriormente.

CAPÍTULO V

INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

5.1 INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO BI-DIMENSIONAL

A representação de Beltrami-Gurtin permite obter de imediato, uma integração da equação do movimento bi-dimensional em regiões limitadas do espaço-tempo tri-dimensional. Para regiões ilimitadas, deve-se prèviamente fixar restrições sôbre os campos em jogo, por exemplo; o comportamento destes no infinito.

Seja a equação do movimento no espaço-tempo tri-dimensional:

$$\mathrm{div}_{(3)}(\underset{\sim}{T} - \rho\dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}}) = -\rho\underset{\sim}{f} \qquad (5.1.1)$$

ou:

$$\mathrm{div}_{(3)}\left[\underset{\sim}{T} - \rho(\dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}} + \Phi\underset{\sim}{I})\right] = -\,\Phi\ \mathrm{grad}_{(3)}\rho\ ;$$

$\underset{\sim}{X} = \{x^1, x^2, t\}$; $\dot{\underset{\sim}{X}} = \{\dot{x}^1, \dot{x}^2, 1\}$; $\underset{\sim}{f} = \{f^1, f^2, 0\}$;

$\Phi = \Phi(x^1, x^2)$; $\underset{\sim}{I}$ é a identidade em $L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$

$$[\underset{\sim}{T}] = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & 0 \\ T^{21} & T^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$; Admitindo-se que sejam válidas as hipóteses de continuidade sobre os campos relacionados ao movimento, pode-se aplicar o teorema de Representação de Beltrami-Gurtin para o $\mathbb{E}^{(3)}$ resultando as seguintes expressões:

(5.1.2)

$$\underset{\sim}{T} - \rho\dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}} = e^{kip}\, e^{mjg}\, a_{ij,pg}\, \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_m + \nabla^2(\underset{(3)}{\text{grad}}\, \underset{\sim}{\psi} + \underset{(3)}{\text{grad}}\underset{\sim}{\psi}^T)$$

$$- \underset{(3)}{\text{grad}}\ \underset{(3)}{\text{grad}}\ (\underset{(3)}{\text{div}}\ \underset{\sim}{\psi}); \quad \nabla^4\underset{\sim}{\psi} = -\rho\underset{\sim}{f}; \quad a_{ij} = a_{ji}; \quad \nabla^2 = \underset{(3)}{\text{div}}\ \underset{(3)}{\text{grad}}$$

Igualmente, para a equação $(5.1.1)^2$, o primeiro membro de $(5.1.2)^1$ toma a forma: $T - \rho(\dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}} + \Phi\underset{\sim}{I})$; enquanto que para a equação $(5.1.2)^2$ teremos a forma: $\nabla^4\underset{\sim}{\psi} = -\Phi\,\underset{3}{\text{grad}}\,\rho$

As componentes de $\underset{\sim}{T} - \rho\dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}}$ são os elementos de matriz:

$$\begin{bmatrix} T^{11} - \rho\dot{x}^{1^2} & T^{12} - \rho\dot{x}^1\dot{x}^2 & -\rho\dot{x}^1 \\ T^{21} - \rho\dot{x}^2\dot{x}^1 & T^{22} - \rho\dot{x}^{2^2} & -\rho\dot{x}^2 \\ -\rho\dot{x}^1 & -\rho\dot{x}^2 & -\rho \end{bmatrix} ;$$

$\underset{\sim}{\psi} = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$

Desdobrando (5.1.2) em componentes vem:

$$T^{km} - \rho\dot{X}^k\dot{X}^m = e^{kip}e^{mjg}\, a_{ij,pg} + \nabla^2(\psi^{k,m} + \psi^{m,k})$$

$- \underset{(3)}{(\text{div}\ \underset{\sim}{\psi})}{}^{,km}$ e: $\nabla^2\psi^k = -\rho f^k$, de onde (ver apêndice C), para $k,m = 1,2,3$ vem:

$$-\rho = e^{ip}e^{jg}a_{ij,pg} + 2\nabla^2\psi^{3,3} - \underset{(3)}{(\text{div}\ \underset{\sim}{\psi})}{}^{,33} \quad ;$$

$$-\rho\dot{x}^k = e^{ki}e^{jg}(a_{ij,g3} - a_{3j,ig}) + \nabla^2(\psi^{k,3} + \psi^{3,k})$$

$$- \underset{(3)}{(\text{div}\ \underset{\sim}{\psi})}{}^{,k3} \quad ; \; k = 1,2 \qquad \text{e}$$

$$T^{km} - \rho\dot{x}^k\dot{x}^m = e^{ki}e^{mj}(a_{ij,33} + a_{33,ij}) +$$

$$- (e^{kp}e^{mj} + e^{kj}e^{mp})a_{3j,p3} + \nabla^2(\psi^{k,m} + \psi^{m,k}) - \underset{(3)}{(\text{div}\ \underset{\sim}{\psi})}{}^{,km}$$

$$; \; k,m = 1,2 \; .$$

Escolhendo para $\underset{\sim}{a}$ um sistema particular de coordenadas cartesianas x-y-t, a forma diagonal, teremos (ver apêndice C) o seguinte resultado:

$$\rho = a_{1,yy} + a_{2,xx} - 2\nabla^2\psi_{t,t} + \underset{(3)}{(\text{div}\ \underset{\sim}{\psi})}_{,tt}$$

$$-\rho\dot{x} = -a_{2,xt} + \nabla^2(\psi_{t,x} + \psi_{x,t}) - \underset{(3)}{(\text{div}\ \underset{\sim}{\psi})}_{,xt} \qquad (5.1.3)$$

$$-\rho\dot{y} = -a_{1,yt} + \nabla^2(\psi_{t,y} + \psi_{y,t}) - \underset{(3)}{(\text{div}\ \underset{\sim}{\psi})}_{,yt}$$

$$T_{xx} - \rho\dot{x}^2 = - A,_{yy} + a_{2,tt} + 2\nabla^2\psi_{x,x} - (\underset{(3)}{\text{div}}\,\underset{\sim}{\psi})_{,xx}$$

$$T_{yy} - \rho\dot{y}^2 = - A,_{xx} + a_{1,tt} + 2\nabla^2\psi_{y,y} - (\underset{(3)}{\text{div}}\,\underset{\sim}{\psi})_{,yy} \qquad (5.1.3)$$

$$T_{xy} - \rho\dot{x}\dot{y} = A,_{xy} + \nabla^2(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) - (\underset{(3)}{\text{div}}\,\underset{\sim}{\psi})_{,xy}$$

$$\nabla^4\psi_x = - \rho f_x \; ; \; \nabla^4\psi_y = - \rho f_y \quad \text{e} \quad \nabla^4\psi_t = 0$$

Para a equação $(5.1.1)^2$ teremos a representação:

$$T_{xx} - \rho(\dot{x}^2 + \Phi) = - A,_{yy} + a_{2,tt} + 2\nabla^2\psi_{x,x} - (\underset{(3)}{\text{div}}\,\underset{\sim}{\psi})_{,xx}$$

$$T_{yy} - \rho(\dot{y}^2 + \Phi) = - A,_{xx} + a_{1,tt} + 2\nabla^2\psi_{y,y} - (\underset{(3)}{\text{div}}\,\underset{\sim}{\psi})_{,yy}$$

$$\nabla^4\psi_x = - \Phi\rho,_x ; \; \nabla^4\psi_y = - \Phi\rho,_y \quad \nabla^4\psi_t = - \Phi\rho,_z \qquad (5.1.4)$$

O restante das equações serão idênticas as equações correspondentes do primeiro grupo.

Observando os dois grupos de equações, as partes referidas aos potenciais a_1, a_2 e A são exatamente as correspondentes da solução de Truesdell para a equação(5.1.1) onde êle considerou o caso particular em que $\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{0}$.

No caso de movimento estacionário teremos a solu ção particular:

$$\rho = a_{1,yy} + a_{2,xx}$$

$$-\rho\dot{\underset{\sim}{x}} = \nabla^2\psi_{t,x}$$

$$-\rho\dot{y} = \nabla^2\psi_{t,y} \qquad (5.1.5)$$

$$T_{xx} - \rho\dot{x}^2 = -A_{,yy} + 2\nabla^2\psi_{x,x} - (\underset{(3)}{\mathrm{div}}\ \underset{\sim}{\psi})_{,xx}$$

$$T_{yy} - \rho\dot{y}^2 = -A_{,xx} + 2\nabla^2\psi_{y,y} - (\underset{(3)}{\mathrm{div}}\ \underset{\sim}{\psi})_{,yy}$$

$$T_{xy} - \rho\dot{x}\dot{y} = A_{,xy} + \nabla^2(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) - (\underset{(3)}{\mathrm{div}}\ \underset{\sim}{\psi})_{,xy}$$

$$\nabla^4\psi_x = -\rho f_x$$

$\nabla^4\psi_y = -\rho f_y$; resultados semelhantes são obtidos das equações correspondentes a equação(5.1.1)^2

$$\nabla^4\psi_t = 0$$

É importante notar que se $\underset{\sim}{\psi} = C^{te}$ e o movimento estacionário, teremos a forma simplificada:

$$\rho = a_{1,yy} + a_{2,xx}$$

$$\rho\dot{x} = 0$$

$$\rho\dot{y} = 0$$

$$T_{xx} = -A,_{yy}$$

$$T_{yy} = -A,_{xx}$$

$$T_{xy} = A,_{xy}$$ que é a solução de Airy[1].

Particularizando a solução ao material, pode-se claramente ver que $\underset{\sim}{\psi}$ é bi-harmônico se o material for imcompressível ou se $\underset{\sim}{f}$ for de ordem superior a ordem das forças em consideração.

5.2 INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO TRI-DIMENSIONAL

Para movimentos tri-dimensionais, temos:

$$\underset{(4)}{\mathrm{div}}\ (\underset{\sim}{T} - \rho\dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}}) = -\rho\underset{\sim}{f} \qquad \text{ou} \tag{5.2.1}$$

$$\underset{(4)}{\mathrm{div}}\left[\underset{\sim}{T} - \rho(\dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}} + \phi\underset{\sim}{I})\right] = -\phi\ \underset{(4)}{\mathrm{grad}}\ \rho\ ;$$

$$\underset{\sim}{X} = \{x^1, x^2, x^3, t\}\ ;\ \dot{\underset{\sim}{X}} = \{\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3, 1\}\ ;\ \underset{\sim}{f} = \{f^1, f^2, f^3, 0\}\ ,$$

$\Phi = \Phi(x^1,x^2,x^3)$, $\underset{\sim}{I}$ é a identidade de $L(\mathbb{V}^{(4)}, \mathbb{V}^{(4)})$, e

$$[\underset{\sim}{T}] = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} & 0 \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} & 0 \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Admitindo-se do mesmo modo a validez das hipóteses de continuidade dos campos em jogo, podemos aplicar ao problema o teorema de Representação de Beltrami-Gurtin do $\mathbb{E}^{(4)}$, chegando as seguintes expressões:

$$\underset{\sim}{T} - \rho\dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}} = e^{\Delta\Lambda\Sigma\Phi}\, e^{\Gamma\Xi\Psi\Omega} A_{\Sigma\Phi\Psi\Omega,\Lambda\Xi}\, \underset{\sim}{e}_\Delta \otimes \underset{\sim}{e}_\Gamma + \nabla^2(\underset{(4)}{\text{grad}}\underset{\sim}{\psi} + \underset{(4)}{\text{grad}}\underset{\sim}{\psi}^T)$$

$$- \underset{(4)}{\text{grad}}\ \underset{(4)}{\text{grad}}\ (\underset{(4)}{\text{div}}\ \underset{\sim}{\psi}); \qquad (5.2.2)$$

$$\nabla^4\underset{\sim}{\psi} = -\rho\underset{\sim}{f} \quad ; \qquad \nabla^2 = \underset{(4)}{\text{div}}\ \underset{(4)}{\text{grad}}$$

Relativamente a equação $(5.2.1)^2$,no primeiro membro da equação(5.2.2.)^1 teremos:

$\underset{\sim}{T} - \rho(\dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}} + \Phi\underset{\sim}{I})$; enquanto que a equação $(5.2.2.)^2$ terá a forma: $\nabla^4\underset{\sim}{\psi} = -\Phi\ \underset{(4)}{\text{grad}}\ \rho$. A matriz de $\underset{\sim}{T} - \rho\dot{\underset{\sim}{X}} \otimes \dot{\underset{\sim}{X}}$ neste caso será:

$$\begin{bmatrix} T^{11} - \rho \dot{x}^{1^2} & T^{12} - \rho \dot{x}^1 \dot{x}^2 & T^{13} - \rho \dot{x}^1 \dot{x}^3 & - \rho \dot{x}^1 \\ T^{21} - \rho \dot{x}^2 \dot{x}^1 & T^{22} - \rho \dot{x}^{2^2} & T^{23} - \rho \dot{x}^2 \dot{x}^3 & - \rho \dot{x}^2 \\ T^{31} - \rho \dot{x}^3 \dot{x}^1 & T^{32} - \rho \dot{x}^3 \dot{x}^2 & T^{33} - \rho \dot{x}^{3^2} & - \rho \dot{x}^3 \\ - \rho \dot{x}^1 & - \rho \dot{x}^2 & - \rho \dot{x}^3 & - \rho \end{bmatrix}$$

Desdobrando $(5.2.2)^1$ em componentes vem:

$$T^{\Gamma\Delta} - \rho \dot{X}^{\Gamma} \dot{X}^{\Delta} = e^{\Delta\Lambda\Sigma\Phi} \, e^{\Gamma\Xi\Psi\Omega} \, A_{\Sigma\Phi\Psi\Omega,\Lambda\Xi} + \nabla^2(\psi^{\Delta,\Gamma} + \psi^{\Gamma,\Delta}) -$$

$$- (\underset{(4)}{\mathrm{div}} \, \underline{\psi})^{,\Gamma\Delta} \quad ;$$

e para a equação $(5.2.2)^2$ vem: $\nabla^4 \psi^{\Gamma} = - \rho f^{\Gamma}$, onde

$\underline{\psi} = \{\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4\}$.

Substituindo os índices Γ e Δ por 1,2,3 e 4 (ver apêndice D) vem:

$$- \rho = e^{smn} \, e^{pqr} \, A_{mnst,np} + 2\nabla^2 \psi^{4,4} - (\underset{(4)}{\mathrm{div}} \, \underline{\psi})^{,44}$$

$$- \rho \dot{x}^k = - e^{ksm} \, e^{pqr} (A_{smqr,p4} - 2A_{4mqr,sp}) + \nabla^2(\psi^{k,4} + \psi^{4,k})$$

$$- (\underset{(4)}{\mathrm{div}} \, \underline{\psi})^{,k4} \qquad ; \; k = 1,2,3 \quad \text{e:}$$

$$T^{km} - \rho \dot{x}^k \dot{x}^m = 4e^{kpg}\, e^{msn}\, A_{4g4s,pn} + 2(e^{kgp}e^{msn} + e^{ksn}e^{mgp})$$

$$A_{4npg,s4} + e^{kpg}e^{msn}A_{pgsn,44} + \nabla^2(\psi^{k,m} + \psi^{m,k}) - (\mathrm{div}\ \underset{(4)}{\underset{\sim}{\psi}})^{,km}$$

$; \ k,m = 1,2,3.$

Escolhendo para $\underset{\sim}{A}$ (ver cap.III) um campo tal que $A_{4p4n} = \delta_{pn}A_{4p4p}$; $A_{4mgr} = 0$; $m,g,r = 1,2,3$ e $A_{mngr} = 0$ se $m \neq g$ ou $n \neq r$, definindo:

$$A^p = A_{4p4p};\ p = 1,2,3\ ;\ A^4 = 2A_{2323}$$

$A^5 = 2A_{1313}$ e $A^6 = 2A_{1212}$ e particularizando a representação para um sistema de coordenadas cartesianas x-y-z-t (ver apêndice D) temos o seguinte resultado:

$$-\rho = A^4_{;xx} + A^5_{;yy} + A^6_{;zz} + 2\nabla^2\psi_{t,t} - (\mathrm{div}\ \underset{(4)}{\underset{\sim}{\psi}})_{,tt}$$

$$\rho\dot{x} = A^4_{;xt} - \nabla^2(\psi_{t,x} + \psi_{x,t}) + (\mathrm{div}\ \underset{(4)}{\underset{\sim}{\psi}})_{,xt}$$

$$\rho\dot{y} = A^5_{;yt} - \nabla^2(\psi_{t,y} + \psi_{y,t}) + (\mathrm{div}\ \underset{(4)}{\underset{\sim}{\psi}})_{,yt}$$

$$\rho\dot{z} = A^{6}_{;zt} - \nabla^2(\psi_{t,z} + \psi_{z,t}) + \underset{(4)}{(\mathrm{div}\ \underset{\sim}{\psi})}_{,zt}$$

$$T_{xx} - \rho\dot{x}^2 = A^{2}_{;zz} + A^{3}_{;yy} + A^{4}_{;tt} + 2\nabla^2\psi_{x,x} - \underset{(4)}{(\mathrm{div}\ \underset{\sim}{\psi})}_{,xx}$$

$$T_{yy} - \rho\dot{y}^2 = A^{3}_{;xx} + A^{1}_{;zz} + A^{5}_{;tt} + 2\nabla^2\psi_{y,y} - \underset{(4)}{(\mathrm{div}\ \underset{\sim}{\psi})}_{,yy}$$

$$T_{zz} - \rho\dot{z}^2 = A^{2}_{;zz} + A^{1}_{;yy} + A^{6}_{;tt} + 2\nabla^2\psi_{z,z} - \underset{(4)}{(\mathrm{div}\ \underset{\sim}{\psi})}_{,zz}$$

$$T_{xy} - \rho\dot{x}\dot{y} = A^{3}_{;xy} + \nabla^2(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) - \underset{(4)}{(\mathrm{div}\ \underset{\sim}{\psi})}_{,xy}$$

$$(5.2.3)$$

$$T_{xz} - \rho\dot{x}\dot{z} = A^{2}_{;xz} + \nabla^2(\psi_{x,z} + \psi_{z,x}) - \underset{(4)}{(\mathrm{div}\ \underset{\sim}{\psi})}_{,xz}$$

$$T_{yz} - \rho\dot{y}\dot{z} = A^{1}_{;yz} + \nabla^2(\psi_{y,z} + \psi_{z,y}) - \underset{(4)}{(\mathrm{div}\ \underset{\sim}{\psi})}_{,yz}$$

Adicionalmente vem:

$$\nabla^4\psi_x = -\rho f_x \quad ; \quad \nabla^4\psi_y = -\rho f_y$$

$$\nabla^4\psi_z = -\rho f_z \quad ; \quad \nabla^4\psi_t = 0 \tag{5.2.4}$$

Observe-se que a solução acima, a menos da parte bi-harmônica é a solução de Truesdell [1] para o caso homogêneo em que $\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{0}$.

Para a equação $(5.2.1)^2$, o primeiro membro das expressões $(5.2.3)^5$, $(5.2.3)^6$, $(5.2.3)^7$ tem a forma:

$$T_{xx} - \rho(\dot{x}^2 + \phi) \; ; \; T_{yy} - \rho(\dot{y}^2 + \phi) \text{ e } T_{zz} - \rho(\dot{z}^2 + \phi) \tag{5.2.5}$$

respectivamente, permanecendo inalteradas as equações restantes. As equações correspondentes do sistema (5.2.4) terão a forma:

$$\nabla^4\psi_x = -\phi\rho,_x \; ; \; \nabla^4\psi_y = -\phi\rho,_y \; ; \; \nabla^4\psi_z = -\phi\rho,_z \quad \text{e}$$

$$\nabla^4\psi_t = -\phi\rho,_t \; . \tag{5.2.6}$$

5.3 CASOS PARTICULARES

Se examinarmos o caso estacionário, as equações (5.2.3) se reduzem a:

$$- \rho = A^{4}_{,xx} + A^{5}_{,yy} + A^{6}_{,zz}$$

$$\rho \dot{x} = - \nabla^2 \psi_{t,x} \quad ; \quad \rho \dot{y} = - \nabla^2 \psi_{t,y} \quad ; \quad \rho \dot{z} = - \nabla^2 \psi_{t,z} \tag{5.2.7}$$

$$T_{xx} - \rho \dot{x}^2 = A^{2}_{,xx} + A^{3}_{,yy} + 2\nabla^2 \psi_{x,x} - (\mathrm{div}\ \underset{(4)}{\psi})_{,xx}$$

$$T_{yy} - \rho \dot{y}^2 = A^{3}_{,xx} + A^{1}_{,zz} + 2\nabla^2 \psi_{y,y} - (\mathrm{div}\ \underset{(4)}{\psi})_{,yy}$$

$$T_{zz} - \rho \dot{z}^2 = A^{2}_{,zz} + A^{1}_{,yy} + 2\nabla^2 \psi_{z,z} - (\mathrm{div}\ \underset{(4)}{\psi})_{,zz}$$

As equações $(5.2.3)^{8}$, $(5.2.3)^{9}$ e $(5.2.3)^{10}$ permanecem inalteradas, o mesmo acontecendo com as equação (5.2.4).

O caso particular de movimento estacionário em que $\underset{\sim}{\psi} = C^{te}$ conduz a equações da forma:

$$- p = A^4_{;xx} + A^5_{;yy} + A^6_{;zz}$$

$$\rho\dot{x} = 0 \quad ; \rho\dot{y} = 0 \quad ; \rho\dot{z} = 0$$

$$T_{xx} = A^2_{;xx} + A^3_{;yy}$$

$$T_{yy} = A^3_{;xx} + A^1_{;zz}$$

$$T_{zz} = A^2_{;zz} + A^1_{;yy}$$

que é a solução de Airy generalizada para o caso tri-dimensional[1].

Para materiais incompressíveis, relativamente ao grupo (5.2.5) resulta:

$\nabla^4\psi_x = 0$; $\nabla^4\psi_y = 0$; $\nabla^4\psi_z = 0$ e $\nabla^4\psi_t = 0$, ou seja; $\underset{\sim}{\psi}$ é campo bi-harmônico.

Igualmente $\underset{\sim}{\psi}$ será campo bi-harmônico provado que $\underset{\sim}{f}$ é nula ou de ordem superior relativamente as forças em consideração.

CAPITULO VI

CONCLUSÃO

Como se pode observar, as equações obtidas pela aplicação do teorema de Representação de Beltrami--Gurtin constituem aparentemente um sistema de equações diferenciais parciais.

Em todos os sistemas de equações obtidos, os primeiros equações, especificamente, as equações em ρ, $\rho\dot{x}$, $\rho\dot{y}$ e $\rho\dot{z}$ em (5.2.3), permitem por uma integração relativamente ao tempo, obter explicitamente a posição das particulas x, y e z como funções dos potenciais vetoriais e tensoriais; nominalmente, das Funções de Tensão.

A substituição das funções x, y e z nas equações restantes, conduz a um sistema de equações integro-diferenciais nas Funções de Tensão.

O grau de complexidade de um tal sistema depende do material particular, isto é, do seu funcional constitutivo.

Em geral mesmo para os materiais mais simples as equações são extremamente complexas; essa complexidade contudo, não impede, diante das grandes perspectivas de aplicação na pesquisa de soluções, que o tratamento ora apresentado deixe de ter grande importância.

Quanto ao procedimento seguido; a equação do movimento formulada em termos de espaço-tempo, permite tratar com uniformidade todos os problemas dinâmicos, tanto estacionários quanto não estacionários. A forma de representação da solução, difere nesses dois casos apenas quanto a simplificação de algumas parcelas de representação, abrangendo no entanto o mesmo número de potenciais.

Convém observar, que o potencial vetorial $\underset{\sim}{\psi}$, é calculado através de equações bi-harmônicas homogêneas e não homogêneas, as quais tem solução; sob as condições do Lema (capítulo III).

Estritamente, os resultados aqui apresentados são válidos sòmente para Espaços-Euclidianos, isto é, espaços de curvatura nula. A dedução de muitas equações durante a exposição, dependem da troca da ordem da derivação covariante, o que só é permissível, quando o tensor de Riemann é identicamente nulo. Truesdell [1] expos uma série de considerações sôbre espaços Riemanianos de curvatura constante e variável. A importância dos resultados expostos por Truesdell é a sua aplicação imediata na pesquisa da representação para a solução da equação do equilíbrio das cascas e placas para o caso de deformações finitas [16].

As equações correspondentes a integração da equação do movimento nesse caso, contém propriedades do espaço particular, como é o exemplo da solução geral para espaços de curvatura constante [1], a qual contém explicitamente a curvatura escalar daquele espaço.

Os resultados efetivos deste trabalho; as soluções para movimentos bi e tri-dimensionais, podem com certeza ser considerados como ponto de referência para a pesquisa das soluções especiais da equação do movimento para os meios contínuos.

Seguir diretamente uma solução geral, não é geralmente um meio eficiente de pesquisa da solução para teorias de materiais particulares. Por exemplo, a conhecida solução de Neuber-Papkovich da elasticidade linear fornece a mais prática aproximação da solução para problemas especiais. Quando porém, a elasticidade linear e as teorias próximas desta, diferirem da teoria em questão, como ponto de referência deve-se recair na solução geral, como ferramenta de comparação de várias teorias existentes.

APÊNDICE A

CALCULO DA DIVERGÊNCIA DO CAMPO TENSORIAL :

$$\underset{\sim}{T} = \frac{\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x} \, (\underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{x})}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}} \quad ; \quad \text{Temos:}$$

$$\text{div } \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{x} \left[\text{grad}\left(\frac{\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}}\right)\right] + \frac{\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}} \text{ div } (\underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{x}) \tag{A.1}$$

$$\text{div } (\underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{x}) = (x^{\Gamma} x^{\Omega})_{,\Omega} \, \underset{\sim}{e}_{\Gamma} = \delta^{\Gamma}_{\Omega} x^{\Omega} \, \underset{\sim}{e}_{\Omega} + x^{\Gamma} \quad n \, \underset{\sim}{e}_{\Gamma} = (n+1)\underset{\sim}{x} \tag{A.2}$$

$$\text{grad}\left(\frac{\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}}\right) = \frac{\text{grad}(\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x})}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}} + (\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x}) \text{ grad}\left(\frac{1}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}}\right)$$

$$\text{grad } (\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x}) = (\lambda^{\Gamma} x^{\Gamma})_{,\Omega} \, \underset{\sim}{e}_{\Omega} = \lambda^{\Gamma} \, \underset{\sim}{e}_{\Gamma} = \underset{\sim}{\lambda}$$

$$\text{grad}\left(\frac{1}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}}\right) = -\frac{(n+2)|\underset{\sim}{x}|^{n+1}}{|\underset{\sim}{x}|^{2n+4}} \cdot \frac{\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|} = -\frac{(n+2)\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+4}} \quad ;$$

Substituindo temos:

$$\text{grad}\left(\frac{\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}}\right) = \frac{\underset{\sim}{\lambda}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}} - \frac{(\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x})(n+2)\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+4}} \; ; \qquad (A.3)$$

Substituindo (A.2) e (A.3) em (A.1) vem:

$$\text{div}\, \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{x} \cdot \frac{\underset{\sim}{\lambda}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}} - \frac{(\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x})(n+2)\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+4}}$$

$$+ \frac{(n+1)(\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x})\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}} = \frac{(\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x})\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}} - \frac{(\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x})(n+2)(\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{x})\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+4}}$$

$$+ \frac{(n+1)(\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x})\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+2}} = \frac{1}{|\underset{\sim}{x}|}\left[-(n+1)(\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x}) + (n+1)(\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x})\right]\underset{\sim}{x}$$

Para todo $\underset{\sim}{x} \in R; |\underset{\sim}{x}| \neq 0$ então: $\text{div}\, \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$ em R.

APÊNDICE B

CALCULO DA INTEGRAL

$$\underset{\sim}{L}(S) = - \int_{\partial B} \frac{\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{x} \; \underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^{n+1}} \, dA; \qquad (B.1)$$

B é a bola-n com centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.

$S = \partial B$ = fronteira de B.

Para um sistema de coordenadas polares de $\mathbb{E}^n$ temos as seguintes equações:

$x_1 = r \cos \theta_1$

$x_2 = r \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2$

$x_3 = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3$

$x_{n-1} = r \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \ldots \operatorname{sen} \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}$

$x_n = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \ldots \operatorname{sen} \theta_{n-2} \operatorname{sen} \theta_{n-1}$

então:

$$\underset{\sim}{n} = - \frac{\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|} = - \frac{\underset{\sim}{x}}{r} = - (\cos\theta_1 \underset{\sim}{e}_1 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \underset{\sim}{e}_2$$

$$+ \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_3 \underset{\sim}{e}_3 + \ldots + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1} \underset{\sim}{e}_{n-1}$$

$$+ \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2} \operatorname{sen}\theta_{n-1} \underset{\sim}{e}_n) \qquad (B.2)$$

onde $\{\underset{\sim}{e}_\Omega\}_{\Omega \in In}$ é base ortonormal. O elemento de área neste caso é dado por: $dA = |\underset{\sim}{x}|^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 \operatorname{sen}^{n-3}\theta_2 \ldots$

$$\ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2} d\theta_1 \, d\theta_2 \ldots d\theta_{n-2} d\theta_{n-1} . \qquad (B.3)$$

Substituindo (B.2) e (B.3) em (B.1) resulta:

$$\underset{\sim}{L}(S) = - \int_{\partial B} (\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{n})\underset{\sim}{n} \; d\omega_n ; \qquad d\omega_n = \text{elemento de área de bola-n unitária.}$$

Então:

$$\underset{\sim}{L}(S) = - \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \ldots \int_0^\pi d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} (\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{n})\underset{\sim}{n} \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 \operatorname{sen}^{n-3}\theta_2$$

$\times \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2}$; $\underset{\sim}{\lambda}$= const $\neq 0$ por hipótese.

(B.4)

As integrais da equação (B.4) dividem-se em dois tipos:

$$\lambda_\Omega \int_{\partial B} n_\Omega \, n_\Delta \, d\omega_n \qquad ; \; \Omega \neq \Delta$$

e (B.5)

$$\lambda_\Omega \int_{\partial B} n_\Omega^2 \, d\omega_n$$

As integrais (B.5)[1] são todas nulas; se fizermos o produto das componentes de $\underset{\sim}{\lambda}$, as expressões do tipo $n_\Omega n_\Delta$ conterão produtos do tipo $\cos\theta_\Omega \operatorname{sen}\theta_\Omega$; pela multiplicação por $d\omega_n$ resulta $\cos\theta_\Omega \operatorname{sen}^{n-\Omega}\theta_\Omega$; cuja integral no intervalo $[0,\pi]$ é nula.

Calculemos agora as integrais do tipo (B.5)[2]; Para $\Omega = 1$ vem:

$$\lambda_1 \int_{\partial B} n_1^2 \, d\omega_n = 2\pi\lambda_1 \int_0^\pi \cos^2\theta_1 \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 d\theta_1 \times \int_0 \operatorname{sen}^{n-3}\theta_2 \, d\theta_2 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\theta_{n-2} \qquad ;$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^p\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2} + \frac{1}{2}\right)} \quad ; \ p = 0,1,2,\ldots$$

onde Γ é a função de Euler.

Substituindo as integrais temos:

$$\int_{\partial B} \lambda_1 n_1^2\, d\omega_n = \lambda_1 \ \frac{2\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{n\,.\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \qquad ;$$

$$\int_{\partial B} \lambda_n n_n^2\, d\omega_n = \lambda_n \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^n\theta_1 d\theta_1 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{n-1}\theta_2 d\theta_2 \ \times \ \ldots$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta_{n-2}\, d\theta_{n-2} \quad 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_{n-1} d\theta_{n-1} = \lambda_n \ \frac{2\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{n\,.\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \qquad ;$$

$$\int_{\partial B} \lambda_p n_p^2 \, d\omega_n = \lambda_p \int_0^\pi \operatorname{sen}^n\theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-1}\theta_2 d\theta_2 \ldots \times$$

$$\times \int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-p+2}\theta_{p-1} d\theta_{p-1} \int_0^\pi \cos^2\theta_p \operatorname{sen}^{n-p-1}\theta_p d\theta_p \quad \times$$

$$\times \int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-p-2}\theta_{p+1} d\theta_{p+1} \times \ldots \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta_{n-2} \, d\theta_{n-2} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \; ;$$

$2 \leqslant p \leqslant n-1$.

$$\int_0^\pi \cos^2\theta_p \operatorname{sen}^{n-p+1}\theta_p \, d\theta_p = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \; \Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)}{2 \cdot \Gamma\left(\frac{n-p}{2} + 2\right)} \quad ; \; p = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Substituindo as integrais resulta:

$$\int_{\partial B} \lambda_p \; n_p^2 \; d\omega_n = \lambda_p \; \frac{2\pi \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Substituindo os resultados em (B.4) resulta que:

$$\int_{\partial B} (\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{n})\underset{\sim}{n} \; d\omega_n = \underset{\sim}{\lambda} \cdot \alpha_n \qquad ; \text{ onde}$$

$$\alpha_n = 2\pi \, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{n \, . \, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \qquad \text{é}$$

o volume da bola-n unitária.

APÊNDICE C

DESENVOLVIMENTO EM COMPONENTES - CASO TRIDIMENSIONAL

Para k,m = 1,2,3 temos:

$$T^{km} - \rho \dot{X}^k \dot{X}^m = e^{kip}\, e^{mjq}\, a_{ij,pq} + \nabla^2(\psi^{k,m} + \psi^{m,k}) - (\underset{(3)}{\mathrm{div}}\, \underset{\sim}{\psi})^{,km}$$

substituindo os índices vem:

$$T^{33} - \rho \dot{X}^3 \dot{X}^3 = - \rho = e^{3ip}\, e^{3jq}\, a_{ij,pq} + \nabla^2(\psi^{3,3} + \psi^{3,3})$$

$$- (\underset{(3)}{\mathrm{div}}\, \underset{\sim}{\psi})^{,33} \qquad ; \; i,p,j,q = 1,2, \quad ;$$

$$- \rho = e^{ip}\, e^{jq}\, a_{ij,pq} + 2\nabla^2 \psi^{3,3} - (\underset{(3)}{\mathrm{div}}\, \underset{\sim}{\psi})^{,33} \qquad \text{(C.1)}$$

$$T^{3k} - \rho \dot{X}^3 \dot{X}^k = - \rho \dot{x}^k = e^{kip}\, e^{3jq}\, a_{ij,pq} + \nabla^2(\psi^{k,3} + \psi^{3,k})$$

$$- (\underset{(3)}{\mathrm{div}}\, \underset{\sim}{\psi})^{,k3} \; ; \; e^{kip}\, e^{3jq}\, a_{ij,pq} = e^{k3p}\, e^{3jq}\, a_{3j,pq} +$$

$$+ e^{ki3} e^{3pq} a_{ij,q3} = - e^{kp} e^{jq} a_{3j,pq} + e^{ki} e^{jq} a_{ij,q3} =$$

$= e^{ki} e^{jq} (a_{ij,q3} - a_{j,iq3})$; substituindo esta identidade vem:

$$- \rho \dot{\chi}^{k} = e^{ki} e^{jq} (a_{ij,q3} - a_{3j,iq}) + \nabla^2(\psi^{k,3} + \psi^{3,k}) +$$

$$- (\mathrm{div} \underset{(3)}{\psi})^{,k3} \quad ; \; k,i,j,p,q = 1,2 \qquad \text{(C.2)}$$

Para $m,k = 1,2$ temos:

$$T^{km} - \rho \dot{\chi}^{k} \dot{\chi}^{m} = e^{kip} e^{mjq} a_{ij,pq} + \nabla^2(\psi^{k,m} + \psi^{m,k}) - (\mathrm{div} \underset{(3)}{\psi})^{,km}$$

$p,q,i,j = 1,2,3$;

$$e^{kip} e^{mjq} a_{ij,pq} = e^{k3p} e^{m3q} a_{33,pq} + e^{ki3} e^{mj3} a_{ij,33} +$$

$$+ e^{k3p} e^{mj3} a_{3j,p3} + e^{ki3} e^{m3q} a_{i3,q3} = e^{kp} e^{mq} a_{33,pq} +$$

$$- e^{ki} e^{mj} a_{ij,33} - e^{kp} e^{mj} a_{3j,p3} - e^{ki} e^{mq} a_{i3,q3} =$$

$$= e^{ki} e^{mj} (a_{ij,33} + a_{33,ij}) - (e^{kp} e^{mj} + e^{kj} e^{mp}) a_{3j,p3};$$

substituindo esta identidade resulta:

$$T^{km} - \rho \dot{\chi}^k \dot{\chi}^m = e^{ki} e^{mj} (a_{ij,33} + a_{33,ij}) +$$

$$- (e^{kp} e^{mj} + e^{kj} e^{mp}) a_{3j,p3} + \nabla^2(\psi^{k,m} + \psi^{m,k}) - (\underset{(3)}{\mathrm{div}}\, \tilde{\psi})^{,km};$$

$$k,m,i,j,p,q = 1,2. \qquad \text{(C.3)}$$

Escolhendo para $\underset{\sim}{a}$ um particular sistema de coordenadas cartezianas $x_1 - x_2 - x_3$, a forma diagonal [1], ou seja

$a_{ij} = \delta_{ij}\, a_{ii}$, $i = 1,2,3$, definindo: $a_{11} = a_1$, $a_{22} = a_2$, $a_{33} = -A$, teremos para (C.1):

$$-\rho = e^{ip}\, e^{jq}\, a_{ii}\delta_{ij,pq} + 2\nabla^2\psi^{3,3} - (\operatorname{div}_{(3)}\psi)^{,33}$$

$$= e^{ip}\, e^{iq}\, a_{ii,pq} + 2\nabla^2\psi^{3,3} - (\operatorname{div}_{(3)}\psi)^{,33}$$

ou:

$$-\rho = -a_{1,22} - a_{2,11} + 2\nabla^2\psi^{3,3} - (\operatorname{div}_{(3)}\psi)^{,33} \qquad \text{(C.4)}$$

Para (C.2) vem:

$$-\rho\dot{x}^k = e^{ki}\, e^{jq}(a_{ii}\delta_{ij,q3} - a_{3j,iq}) + \nabla^2(\psi^{k,3} + \psi^{3,k}) +$$

$- (\operatorname{div}_{(3)}\psi)^{,k3}$; $e^{ki}\, e^{jq}\, a_{ii}\delta_{ij,q3} = e^{ki}\, e^{iq}\, a_{ii,q3}$; de

onde: $-\rho\dot{x}_1 = -a_{2,13} + \nabla^2(\psi^{1,3} + \psi^{3,1}) - (\operatorname{div}_{(3)}\psi)^{,13}$ (C.5)

$$- \rho \dot{x}^2 = - a_{1,23} + \nabla^2(\psi^{3,2} + \psi^{2,3}) - (\underset{(3)}{\mathrm{div}\ \psi})^{,23} \tag{C.6}$$

Para (C.3) temos:

$$T^{km} - \rho \dot{x}^k \dot{x}^m = e^{ki}\ e^{mj}(a_{ii}\delta_{ij,33} + a_{33,ij})$$

$$- (e^{kp}\ e^{mj} + e^{kj}\ e^{mp})\ a_{3j,p3} + \nabla^2(\psi^{k,m} + \psi^{m,k}) - (\underset{(3)}{\mathrm{div}\ \psi})^{,km}$$

de onde:

$$T^{11} - \rho \dot{x}^1 \dot{x}^1 = a_{2,33} - A_{,22} + 2\nabla^2\psi^{1,1} - (\underset{(3)}{\mathrm{div}\ \psi})^{,11} \tag{C.7}$$

$$T^{22} - \rho \dot{x}^2 \dot{x}^2 = a_{1,33} - A_{,11} + 2\nabla^2\psi^{2,2} - (\underset{(3)}{\mathrm{div}\ \psi})^{,22} \tag{C.8}$$

$$T^{12} - \rho \dot{x}^1 \dot{x}^2 = A_{,12} + \nabla^2(\psi^{2,1} + \psi^{1,2}) - (\underset{(3)}{\mathrm{div}\ \psi})^{,12} \tag{C.9}$$

De: $\nabla^4 \psi = - \rho \underset{\sim}{f}$ resultam:

$$\nabla^4\psi^1 = - \rho f^1 \ ;\ \nabla^4\psi^2 = - \rho f^2 \ \text{ e } \nabla^4\psi^3 = 0 \tag{C.10}$$

APÊNDICE D

DESENVOLVIMENTO EM COMPONENTES - CASO TETRA-DIMENSIONAL

A equação (5.2.2) em forma componente é a seguinte:

$$T^{\Gamma\Delta} - \rho X^{\Gamma} X^{\Delta} = e^{\Delta\Lambda\Sigma\Phi} e^{\Gamma\Xi\Psi\Omega} A_{\Sigma\Phi\Psi\Omega,\Lambda\Xi} + \nabla^2(\psi^{\Delta,\Gamma} + \psi^{\Delta,\Gamma})$$

$$- (\mathrm{div}_{(4)} \underset{\sim}{\psi})^{,\Gamma\Delta}$$

Variando os índices de 1 a 4 teremos:

$$- \rho = e^{4\Lambda\Sigma\Phi} e^{4\Xi\Psi\Omega} A_{\Sigma\Phi\Psi\Omega,\Lambda\Xi} + \nabla^2(\psi^{4,4} + \psi^{4,4}) - (\mathrm{div}_{(4)} \underset{\sim}{\psi})^{,44}$$

ou

$$- \rho = e^{smn} e^{pqr} A_{mnst,np} + 2\nabla^2\psi^{4,4} - (\mathrm{div}_{(4)} \underset{\sim}{\psi})^{,44} \qquad (D.1)$$

$$- \rho \dot{x}^{k} = e^{k\Lambda\Sigma\Phi} e^{4\Xi\Psi\Omega} A_{\Sigma\Phi\Psi\Omega,\Lambda\Xi} + \nabla^2(\psi^{k,4} + \psi^{4,k}) - (\mathrm{div}_{(4)} \underset{\sim}{\psi})^{,k4};$$

onde:

$$e^{k\Lambda\Sigma\Phi}\, e^{4\Xi\psi\Omega}\, A_{\Sigma\Phi\psi\Omega,\Lambda\Xi} = -\, e^{4k\Sigma\Phi}\, e^{4\Xi\psi\Omega}\, A_{\Sigma\Phi\psi\Omega,\Xi 4}$$

$$+\, e^{4k\Lambda\Phi}\, e^{4\Xi\psi\Omega}\, A_{4\Phi\psi\Omega,\Lambda\Xi} - e^{4k\Lambda\Sigma}\, e^{4\Xi\psi\Omega}\, A_{\Sigma 4\psi\Omega,\Lambda\Xi} =$$

$$= -\, e^{4k\Sigma\Phi}\, e^{4\Xi\psi\Omega}\, A_{\Sigma\Phi\psi\Omega,\Xi 4} + e^{4k\Lambda\Phi}\, e^{4\Xi\psi\Omega}\, A_{4\Phi\psi\Omega,\Lambda\Xi} +$$

$$+\, e^{4k\Lambda\Sigma}\, e^{4\Xi\psi\Omega}\, A_{4\Sigma\psi\Omega,\Lambda\Xi} \quad ;$$

onde os indices gregos remanescentes tomam valores do conjunto {1,2,3} , Substituindo estes indices pelos indices latinos e agrupando os termos convenientemente resulta:

$$-\, e^{ksm}\, e^{pqr}(A_{smqr,p4} - 2A_{4mqr,sp}) \;;$$

Substituindo esta identidade vem:

$$- \rho \dot{x}^k = - e^{ksm} e^{pqr} (A_{smqr,p4} - 2A_{4mqr,sp})$$

$$+ \nabla^2 (\psi^{k,4} + \psi^{4,k}) - (\operatorname{div}_{(4)} \psi)^{,k4} \quad ; \; k = 1,2,3 \qquad (D.2)$$

Para Γ, $\Delta = 1,2,3$ temos:

$$T^{km} - \rho \dot{x}^k \dot{x}^m = e^{k\Lambda\Sigma\Phi} e^{m\Xi\psi\Omega} A_{\Sigma\Phi\psi\Omega,\Lambda\Xi} +$$

$$\nabla^2 (\psi^{k,m} + \psi^{m,k}) - (\operatorname{div}_{(4)} \psi)^{,km} \quad ; \; k,m = 1,2,3$$

com: $\Lambda, \Sigma, \Phi, \psi, \Omega, \Lambda, \Xi = 1,2,3,4.$

Analogamente ao desenvolvimento da identidade anterior chega-se a :

$$e^{k\Lambda\Sigma\Phi} e^{m\Xi\psi\Omega} A_{\Sigma\Phi\psi\Omega,\Lambda\Xi} = 4e^{kpq} e^{msn} A_{4q4s,pn} \quad +$$

$$+\ 2(e^{kqp}\ e^{msn} + e^{ksn}\ e^{mqp})A_{4npq,s4} +$$

$$e^{kpq}\ e^{msn}\ A_{pqsn,44}\ ; \quad k,m,p,q = 1,2,3.$$

Substituindo a identidade resulta:

$$T^{km} - \rho\dot{\chi}^{k}\dot{\chi}^{m} = 4\ e^{kpq}\ e^{msn}\ A_{4q4s,pn} +$$

$$+\ 2(e^{kqp}\ e^{msn} + e^{ksn}\ e^{mqp})\ A_{4npq,s4} + \qquad (D.3)$$

$$e^{kpq}\ e^{msn}\ A_{pqsn,44} + \nabla^2(\psi^{k,m} + \psi^{m,k}) - (\operatorname{div}_{(4)} \underset{\sim}{\psi})^{,km}$$

Escolhendo-se para $\underset{\sim}{A}$, um campo tensorial particular tal que:

$$A_{4p4n} = \delta_{pn}\ A_{4p4p}\ ;\ A_{4mqr} = 0\ \ ;\ m,q,r, = 1,2,3 \quad e$$

$A_{mnqr} = 0$ se $m \neq q$ ou $n \neq r$ e pondo:

$A^p = A_{4p4p}$; $p = 1,2,3$, $A^4 = 2A_{2323}$ $A^5 = 2A_{1313}$ e
$A^6 = 2A_{1212}$ teremos:

$$e^{smn} e^{pqr} A_{mnsr,sp} = e^{smn} e^{pmn} A_{mnmn,sp} =$$

$$= A_{mnmn,sp} \delta^{sp} = A_{mnmn,ss} \qquad m \neq n \ , \quad n \neq s$$

$$(A_{2323} + A_{3232})_{,11} + (A_{1313} + A_{3131})_{,22}$$

$$+ (A_{1212} + A_{2121})_{,33} = 2A_{1212,33} + 2A_{1313,22}$$

$$+ 2A_{2323,11} = A^4_{;11} + A^5_{;22} + A^6_{;33} \qquad .$$

Por (D.1) teremos

$$- \rho = A^4_{;11} + A^5_{;22} + A^6_{;33} + 2\nabla^2\psi^{4,4} - (\operatorname{div} \underset{(4)}{\underline{\psi}})^{,44} \tag{D.4}$$

Da identidade:

$$- e^{ksn} e^{pqr}(A_{snqr,p4} - 2A_{4,qr,sp}) =$$

$$- e^{ksm}\, e^{psm}\, A_{smsm,p^4} = - A_{smsm,k^4} \;;\; s \neq m \;,\; s \neq k$$

por (D.2) ; para k = 1,2,3 resultam:

$$- \rho \dot{x}^1 = - (A_{2323} + A_{3232})_{,14} + 2\nabla^2(\psi^{1,4} + \psi^{4,1}) - (\operatorname{div} \underset{(4)}{\underline{\psi}})^{,14}$$

$$\rho \dot{x}^1 = A^4_{;14} - \nabla^2(\psi^{1,4} + \psi^{4,1}) + (\operatorname{div} \underset{(4)}{\underline{\psi}})^{,14} \tag{D.5}$$

$$- \rho \dot{x}^2 = - (A_{1313} + A_{3131})_{,24} + \nabla^2(\psi^{2,4} + \psi^{4,2}) - (\operatorname{div} \underset{(4)}{\underline{\psi}})^{,24}$$

$$\rho \dot{x}^2 = A^5_{;24} - \nabla^2(\psi^{2,4} + \psi^{4,2}) + (\operatorname{div} \underset{(4)}{\underline{\psi}})^{,24} \tag{D.6}$$

e:

$$- \rho \dot{x}^3 = - (A_{1212} + A_{2121})_{,3} + \nabla^2(\psi^{3,4} + \psi^{4,3}) - (\operatorname{div} \underset{(4)}{\underline{\psi}})^{,34} \;;$$

$$\rho \dot{x}^3 = A^6_{;34} - \nabla^2(\psi^{3,4} + \psi^{4,3}) + (\operatorname{div} \underset{(4)}{\underline{\psi}})^{,34} \tag{D.7}$$

Por (D.3); para m = k vem a identidade:

$$4\ e^{kpq}\ e^{msn}\ A_{4q4s,qn} + 2(e^{kpq}\ e^{msn} + e^{ksn}\ e^{mqp})A_{4npq,s4}\ +$$

$$e^{kpq}\ e^{msn}\ A_{pqsn,44} = 4\ e^{kpq}\ e^{kpn}\ A_{4p4n,qn}\ +$$

$$e^{kpq}\ e^{kpq}\ A_{pqpq,44} = 4\ \underset{n\neq k\ ,\ p\neq k}{A_{4p4p,nn}} + \underset{p\neq k\ ,\ q\neq k}{e^{kpq}\ e^{kpq}\ A_{pqpq,44}}\ ;$$

donde, pela mesma expressão vem:

$$T^{11} - \rho\dot{x}^{1^2} = 4\ A_{4242,33} + 4\ A_{4343,22}\ +$$

$$A_{2323,44} + A_{3232,44} + 2\nabla^2\psi^{1,1} - (\text{div}\ \underset{(4)}{\psi})^{,11}\ ;$$

$$T^{11} - \rho\dot{x}^{1^2} = A^4_{;44} + A^3_{;22} + A^2_{;33} + 2\nabla^2\psi^{1,1} - (\text{div}\ \underset{(4)}{\psi})^{,11} \quad (D.8)$$

$$T^{22} - \rho\dot{x}^{2^2} = 4\ A_{4141,33} + 4\ A_{4343,11} + A_{1313,44}\ +$$

$$+ A_{3131,44} + \nabla^2\psi^{2,2} - (\underset{(4)}{\mathrm{div}}\ \underset{\sim}{\psi})^{,22} ;$$

$$T^{22} - \rho\dot{x}^{2^2} = A^1_{;33} + A^3_{;11} + A^5_{;44} + \nabla^2\psi^{2,2} - (\underset{(4)}{\mathrm{div}}\ \underset{\sim}{\psi})^{,22} \quad (D.9)$$

$$T^{33} - \rho\dot{x}^{3^2} = 4\ A_{4141,22} + 4\ A_{4242,11} + A_{1212,44} + A_{2121,44}$$

$$+ 2\nabla^2\psi^{3,3} - (\underset{(4)}{\mathrm{div}}\ \underset{\sim}{\psi})^{,33} ;$$

$$T^{33} - \rho\dot{x}^{3^2} = A^1_{;22} + A^2_{;11} + A^6_{;44} + \nabla^2\psi^{3,3} - (\underset{(4)}{\mathrm{div}}\ \underset{\sim}{\psi})^{,33} \quad (D.10)$$

Se $m \neq k$; $\quad 4\ e^{kpq}\ e^{msn}\ A_{4q4s,qn} +$

$$2(e^{kpq}\ e^{msn} + e^{ksn}\ e^{mqp})\ A_{4npq,s4} + e^{kpq}\ e^{msn}\ A_{pqsn,44} =$$

$$= 4\ e^{kpq}\ e^{mpn}\ A_{4p4p,qn} + e^{kpq}\ e^{mpq}\ A_{pqpq,44} =$$

$$= 4(\cancel{\delta^{km}}\,\delta^{qn} - \delta^{kn}\,\delta^{qm})\,A_{4p4p,sn} + \cancel{\delta^{km}}\,A_{pqpq,44}$$

$$= -\,4\,\delta^{kn}\,\delta^{qm}\,A_{4p4p,qn} = -\,4\,A_{4p4p,mn}\;;$$

$$p \neq m,\; n \neq m,\; p \neq n$$

Novamente, por (D.3) resultam:

$$T^{12} - \rho\dot{x}^1\dot{x}^2 = -\,4\,A_{4343,12} + \nabla^2(\psi^{1,2} + \psi^{2,1}) - (\underset{(4)}{\mathrm{div}}\,\underset{\sim}{\psi})^{,12};$$

$$T^{12} - \rho\dot{x}^1\dot{x}^2 = -\,A^3_{;12} + \nabla^2(\psi^{1,2} + \psi^{1,2}) - (\underset{(4)}{\mathrm{div}}\,\underset{\sim}{\psi})^{,12} \qquad (D.11)$$

$$T^{13} - \rho\dot{x}^1\dot{x}^3 = -\,4\,A_{4242,13} + \nabla^2(\psi^{1,3} + \psi^{3,1}) - (\underset{(4)}{\mathrm{div}}\,\underset{\sim}{\psi})^{,13}\;;$$

$$T^{13} - \rho\dot{x}^1\dot{x}^3 = -\,A^2_{;13} + \nabla^2(\psi^{1,3} + \psi^{3,1}) - (\underset{(4)}{\mathrm{div}}\,\underset{\sim}{\psi})^{,13} \qquad (D.12)$$

$$T^{23} - \rho\dot{x}^2\dot{x}^3 = -\,4\,A_{4141,23} + \nabla^2(\psi^{2,3} + \psi^{3,2}) - (\underset{(4)}{\mathrm{div}}\,\underset{\sim}{\psi})^{,23}$$

$$T^{23} - \rho\dot{x}^2\dot{x}^3 = -\,A^1_{;23} + \nabla^2(\psi^{2,3} + \psi^{3,2}) - (\underset{(4)}{\mathrm{div}}\,\underset{\sim}{\psi})^{,23} \qquad (D.13)$$

De: $\nabla^4 \underset{\sim}{\psi} = -\rho \underset{\sim}{f}$ vem: $\nabla^4 \psi^1 = -\rho f^1$; $\nabla^4 \psi^2 = -\rho f^2$

$$\nabla^4 \psi^3 = -\rho f^3 \qquad \text{e} \quad \nabla^4 \psi^4 = 0 \ . \tag{D.14}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Truesdell, C. - "Invariant and Complete Stress Functions for General Continua" Arch. Rational Mech. Anal. 4, (1959)

[2] Gurtin, M.E. - "A Generalization of the Beltrami Stress Functions in Continuum Mechanics". Arch. Rational Mech. Anal.,13, 321-329 (1963)

[3] Gurtin, M.E. - "The Linear Theory of Elasticity" - (a ser publicado no Handbuch der Physik).

[4] Morinaga, K. & T. Nōno - "On stress Functions in General Coordinates" J.Sei. Hiroshima Univ.,14,181-184 (1950).

[5] Stippes, M. - "A Note on Stress Functions" J.Solid Structures, 3, - 705-711 Pergamon Press Ltd. Printed in Great Britain (1967).

[6] Ornstein, W. - "Stress Functions of Maxwell and Morera"

Quart. Appl. Math. 2,198-201 (1954)

[7] Toupin, R.A. - "World Invariant Kinematics". Arch. Rational Mech. Anal. 1,181-211 (1958).

[8] Gurtin, M.E. - " On Helmholtz's Theorem and the Completeness of the Papkovich - Neuber Stress Functions for Infinite Domains" Arch. Rational Mech. Anal. 9, 226-233 (1961)

[9] Sternberg, E.- "On the Integration of the equations of motions in the Classical Theory of Elasticity" Arch. Rational Mech. Anal. 6; 35-51 (1959)

[10] Helwig, G. - "Partial Differential Equations" Blaisdell Publishing Co, N.Y.(1959)

[11] Truesdell, C. - "The Elements of Continuum Mechanics" Springer Verlag (1966)

[12] Sneddon, I.N. & Berry, D.S. - "The Classical Theory of Elasticity" Handbuch der Physik, B.D. VI

[13] Courant & Hilbert - "Methods of Mathematical Physics II"

John Wiley & Sons, N.Y. (1961)

[14] Kellog, O.D. - "Potential Theory"
New York (1929)

[15] F. John - "Partial Differential Equations"
Springer Verlag (1971)

[16] Ericksen, J.L. & Truesdell, C. - "Exact Theory of Stress and Strain in Rods and Shells"
Arch. Rational Mech. Anal. 1,195-323
(1958)